# Corrigé du Devoir Surveillé 5
# Analyse asymptotique, ensembles et applications, continuité-dérivabilité

## Problème I - Continuité-dérivabilité

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose $\mathscr{P}(f)$ l'assertion supposant les cinq points suivants :

1. $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$,
2. $f$ est positive sur $\mathbb{R}_+$,
3. $f$ est non identiquement nulle,
4. $f(0) = 0$,
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Soit $F$ une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}_+$ et $G$ une primitive de $x \mapsto xf(x)$ sur $\mathbb{R}_+$.

### Partie 1 : Un exemple

On suppose dans cette partie uniquement que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrons les cinq propriétés de $\mathscr{P}(f)$.

   1 Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+$ donc par produit, $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   2 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$. Donc par produit, $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$.

   3 Si $x = 1$, on a $f(1) = \mathrm{e}^{-1} \neq 0$. Donc $f$ est non identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$.

   4 $f(0) = 0 \times \mathrm{e}^{-0} = 0$.

   5 Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$.

   Conclusion,
   $$\boxed{\text{la fonction } f \text{ vérifie } \mathscr{P}(f).}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifions que $f$ est $n$-fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculons sa dérivée $n$-ième. Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ sont $n$-fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Donc par produit $f$ est $n$-fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et par la formule de Leibniz, on a
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$
   Or $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $u'(x) = 1$ et pour tout $k \geqslant 2$, $u^{(k)}(x) = 0$. Donc si $n \geqslant 1$,
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f^{(n)}(x) = \binom{n}{0} u(x) v^{(n)}(x) + \binom{n}{1} u'(x) v^{(n-1)}(x) + 0.$$
   D'autre part, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $v^{(k)}(x) = (-1)^k\,\mathrm{e}^{-x}$. D'où,
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n x\,\mathrm{e}^{-x} + n(-1)^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x} = (-1)^n\,\mathrm{e}^{-x}(x-n).$$
   La formule reste vraie si $n = 0$. Conclusion, $f$ est $n$-fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^n\,\mathrm{e}^{-x}(x-n).}$$
   *On peut vérifier son résultat pour $n = 1$ : $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$ et $(-1)^n\,\mathrm{e}^{-x}(x-n) = -\mathrm{e}^{-x}(x-1) = f'(x)$ OK !*

3. Montrons que $f$ admet un minimum global et un maximum global sur $\mathbb{R}_+$ et précisons-les. Par la question précédente, pour $n=1$,
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = -\,\mathrm{e}^{-x}(x-1) = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$
Donc pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f'(x) > 0 \iff 1-x > 0 \iff x < 1$. De plus, $f(1) = \mathrm{e}^{-1}$. A l'aide de la question 1. on obtient donc le tableau de variation suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $\mathrm{e}^{-1}$ | $\searrow$ | $0$ |

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(0) = 0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-1} = f(1)$. Conclusion,
$$\boxed{f \text{ admet } 0 \text{ pour minimum atteint en } 0 \text{ et } \mathrm{e}^{-1} \text{ pour maximum atteint en } 1.}$$

4. Montrons qu'il existe exactement deux valeurs $\alpha$ et $\beta$, $\alpha < \beta$ telle que $f(\alpha) = f(\beta) = \frac{1}{4}$. Par la question précédente, on a

   - $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$,
   - $f$ est strictement croissante sur $[0;1]$,
   - $f(0) = 0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{-1} = f(1)$ car $4 > \mathrm{e}$.

   Donc par le théorème de la bijection,
$$\exists!\alpha \in \,]0;1[\,, \quad f(\alpha) = \frac{1}{4}.$$
De la même façon puisque $f(1) > \frac{1}{4} > 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Il existe aussi un unique $\beta \in \,]1;+\infty[$ tel que $f(\beta) = \frac{1}{4}$. Globalement, on en conclut que
$$\boxed{\text{il existe exactement deux valeurs } \alpha \text{ et } \beta,\ \alpha < 1 < \beta \text{ telle que } f(\alpha) = f(\beta) = \frac{1}{4}.}$$

5. Montrons que $F$ est $1/\mathrm{e}$-lipschitzienne. Par la question 3. on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-1}$ et donc $|f(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-1}$. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}_+$, $a \neq b$. La fonction $F$ est une primitive de $f$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc $F$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Donc $F$ est

   - continue sur $[a;b]$ (ou $[b;a]$),
   - dérivable sur $]a;b[$ (ou $]b;a[$).

   Donc par le théorème des accroissements finis,
$$\exists c \in \,]a;b[\, \subset \mathbb{R}_+, \quad \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c) = f(c).$$
Donc
$$|F(b)-F(a)| = |f(c)|\,|b-a| \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}\,|b-a|\,.$$
Encore vraie si $a=b$. Conclusion,
$$\boxed{F \text{ est } \frac{1}{\mathrm{e}}\text{-lipschitzienne}}$$

6. Déterminons $F$ en fonction de $F(0)$. La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc par le théorème fondamental de l'analyse,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) = F(0) + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(0) + \int_0^x t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Posons

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = -\mathrm{e}^{-t}. \end{cases}$$

Les fonctions $u$ et $v$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v'(t) = \mathrm{e}^{-t}. \end{cases}$$

Donc par le théorème d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0) + \left[-t\,\mathrm{e}^{-t}\right]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x -\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= F(0) - x\,\mathrm{e}^{-x} + 0 - \left[\mathrm{e}^{-t}\right]_{t=0}^{t=x} \\ &= F(0) - x\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + 1. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F(0) + 1 - (x+1)\,\mathrm{e}^{-x} \end{array}}$$

*On vérifie son résultat :* $F(0) = F(0) + 1 - \mathrm{e}^0 = F(0)$ *OK ! Et,*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + (x+1)\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$$

*OK !*

7. Vérifions que $F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + o(x)$. On sait que $\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + o(x)$. Donc

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0) + 1 - (x+1)\,\mathrm{e}^{-x} \\ &\underset{x\to 0}{=} F(0) + 1 - (1+x)\,(1 - x + o(x)) \\ &\underset{x\to 0}{=} F(0) + 1 - 1 + x + o(x) - x + o(x) \\ &\underset{x\to 0}{=} F(0) + o(x). \end{aligned}$$

Conclusion, on a bien

$$\boxed{F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + o(x).}$$

## Partie 2 : Comportement de $F$ en 0

On reprend $f$ une fonction quelconque vérifiant $\mathscr{P}(f)$.
On veut démontrer le lemme du cours (primitivation du $o$) qui affirme que $G(x) \underset{x\to 0}{=} G(0) + o\left(x^2\right)$.

8. Soit $\varepsilon > 0$. Justifions qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [0;\eta]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon$. La fonction $f$ est par hypothèse continue sur $\mathbb{R}_+$ donc en 0. Par définition, pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\exists \eta > 0, \quad \forall [0;\eta], \qquad -\varepsilon \leqslant f(x) - f(0) \leqslant \varepsilon.$$

Or $f(0) = 0$ donc pour tout $x \in [0;\eta]$, $-\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon$. De plus on sait que $f$ est positive donc $f(x) \geqslant 0$ et donc $0 \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon$. Conclusion,

$$\boxed{\exists \eta > 0,\ \forall x \in [0;\eta], \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon.}$$

9. Montrons que pour tout $x \in ]0;\eta]$, $0 \leqslant \frac{G(x)-G(0)}{x} \leqslant x\,\varepsilon$. Soit $x \in ]0;\eta]$. La fonction $x \mapsto xf(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de fonctions qui le sont. La fonction $G$ est une primitive de $x \mapsto xf(x)$. Donc $G$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Donc

   - $G$ est continue sur $[0;x]$
   - $G$ est dérivable sur $]0;x[$ (car $x > 0$).

   Donc par le théorème des accroissements finis,

$$\exists c \in ]0;x[\,, \quad \frac{G(x)-G(0)}{x-0} = G'(c) = cf(c).$$

   Puisque $c \in ]0;x[ \subset [0;\eta]$ car $x \leqslant \eta$, on en déduit que $0 \leqslant f(c) \leqslant \varepsilon$ et donc $0 \leqslant cf(c) \leqslant c\varepsilon$ car $c > 0$. Puis $c < x$, on en déduit que $0 \leqslant cf(c) \leqslant x\,\varepsilon$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in ]0;\eta]\,, \quad 0 \leqslant \frac{G(x)-G(0)}{x} \leqslant x\,\varepsilon\,.}$$

10. Montrons que $G(x) \underset{x\to 0}{=} G(0) + o\left(x^2\right)$. Par la question précédente,

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in ]0;\eta[\,, \quad 0 \leqslant \frac{G(x)-G(0)}{x^2} \leqslant \varepsilon,$$

   et donc $-\,\varepsilon \leqslant \frac{G(x)-G(0)}{x^2} \leqslant \varepsilon$. Ceci étant la définition de la limite, on a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{G(x)-G(0)}{x^2} = 0.$$

   Ou encore par définition de la négligeabilité,

$$G(x) - G(0) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right).$$

   Conclusion,

$$\boxed{G(x) \underset{x\to 0}{=} G(0) + o\left(x^2\right).}$$

## Partie 3 : Lipschitziannité de $F$

11. Montrons qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ et $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\begin{cases} f(a) > 0 \\ \forall x \in [A;+\infty[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{f(a)}{2}. \end{cases}$$

   La fonction $f$ n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$. Donc il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(a) > 0$. Posons $\varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, par définition,

$$\exists A \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in [A;+\infty[\,, \quad -\,\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon\,.$$

   Or $f$ est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc $0 \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon = \frac{f(a)}{2}$. Conclusion,

$$\boxed{\begin{cases} f(a) > 0 \\ \forall x \in [A;+\infty[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{f(a)}{2}. \end{cases}}$$

12. Vérifions que $a < A$. Procédons par l'absurde. Supposons $a \geqslant A$. Alors par la question précédente,

$$f(a) \leqslant \frac{f(a)}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 \leqslant \frac{1}{2} \qquad \text{car } f(a) > 0.$$

Ce qui est contradictoire. Conclusion,

$$\boxed{a < A.}$$

13. La fonction $f$ est **continue** sur le **segment** $[0; A]$. Par le théorème des bornes atteintes, il existe $\alpha \in [0; A]$ tel que $f(\alpha) = M = \max\limits_{x \in [0;A]} f(x)$. En particulier pour $a \in [0; A]$ (par la question précédente), on a $f(a) \leqslant M$. De plus par la question 11.,

$$\forall x \in [A; +\infty[, \quad f(x) \leqslant \frac{f(a)}{2} \leqslant \frac{M}{2} < M.$$

Ainsi pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) \leqslant M$. $M$ est donc un majorant sur $\mathbb{R}_+$ tout entier et comme $M = f(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on en conclut que

$$\boxed{M \text{ est un maximum de } f \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$$

14. Montrons que pour tout $y \in [0; M]$, il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = f(x)$. Soit $y \in [0; M]$. On a $0 = f(0)$ et $M = f(\alpha)$. Donc

- $f$ est continue sur $[0; \alpha]$,
- $f(0) \leqslant y \leqslant f(\alpha)$.

Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [0; \alpha]$ tel que $y = f(x)$. Conclusion,

$$\boxed{\forall y \in [0; M], \ \exists x \in [0; \alpha] \subset \mathbb{R}_+, \quad y = f(x).}$$

15. Montrons que $F$ est $M$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$. La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc la fonction $F$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $x \neq y$. On a

- $F$ est continue sur $[x; y]$ (ou $[y; x]$),
- $F$ est dérivable sur $]x; y[$ (ou $]y; x[$).

Donc par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in ]x; y[$ (ou $]y; x[$) tel que

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} = F'(c) = f(c).$$

Par la question précédente $0 \leqslant f(c) \leqslant M$. Donc

$$\left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} \right| = |f(c)| = f(c) \leqslant M \qquad \Rightarrow \qquad |F(y) - F(x)| \leqslant M\,|y - x|$$

ce qui reste vrai si $x = y$. Conclusion,

$$\boxed{F \text{ est } M\text{-lispchitzienne sur } \mathbb{R}_+.}$$

# Problème II - Ensembles et applications

Soit $E$ un ensemble. Pour tout $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$, on pose

$$A + B = \{a + b \in E \mid a \in A \text{ et } b \in B\} = \{x \in E \mid \exists (a, b) \in A \times B,\ x = a + b\}.$$

## Partie 1 : Considérations ensemblistes

1. On pose $A = \{0\,;\,1\}$ et $B = \{1\,;\,4\}$. Par énumération exhaustive des couples $(a, b) \in A \times B$, on obtient

$$A + B = \{0 + 1\,;\,0 + 4\,;\,1 + 1\,;\,1 + 4\} = \{1\,;\,4\,;\,2\,;\,5\}.$$

Conclusion,

$$\boxed{A + B = \{1\,;\,2\,;\,4\,;\,5\}.}$$

2. Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $A \neq \emptyset$. Montrons que $A + \mathbb{R} = \mathbb{R}$. Procédons par double inclusion.

Soit $x \in A + \mathbb{R}$. Alors il existe $a \in A$ et $y \in \mathbb{R}$ tel que $x = a + y$. Or $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Donc $a \in A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Ainsi $x = a + y \in \mathbb{R}$, ce qui démontre que

$$A + \mathbb{R} \subset \mathbb{R}.$$

Réciproquement soit $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble $A$ est non vide donc $\exists a \in A$. Posons $y = x - a$. Puisque $a \in A \subset \mathbb{R}$, alors $y \in \mathbb{R}$. Donc

$$x = \underbrace{a}_{\in A} + \underbrace{y}_{\in \mathbb{R}} \in A + \mathbb{R},$$

ce qui démontre que $\mathbb{R} \subset A + \mathbb{R}$. Conclusion,

$$\boxed{A + \mathbb{R} = \mathbb{R}.}$$

3. Soient $(A, A', B, B') \in \mathscr{P}(E)^4$ tel que $A \subset A'$ et $B \subset B'$.

Soit $x \in A + B$. Alors il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $x = a + b$. Or $a \in A \subset A'$ et $b \in B \subset B'$. Donc $x$ est la somme d'un élément $a$ de $A'$ et d'un élément $b$ de $B'$. Donc $x \in A' + B'$. Conclusion,

$$\boxed{A + B \subset A' + B'.}$$

4. Soient $(A_1, A_2, B) \in \mathscr{P}(E)^3$. Soit $x \in (A_1 + B) \cup (A_2 + B)$. Alors $x \in A_1 + B$ OU $x \in A_2 + B$.

*Premier cas,* $x \in A_1 + B$, alors il existe $a_1 \in A_1$ et $b \in B$ tel que $x = a_1 + b$. Or $a_1 \in A_1 \subset A_1 \cup A_2$ donc

$$x = \underbrace{a_1}_{\in A_1 \cup A_2} + \underbrace{b}_{\in B} \in (A_1 \cup A_2) + B.$$

*Second cas,* $x \in A_2 + B$ alors de même il existe $a_2 \in A_2 \subset A_1 \cup A_2$ et $b \in B$ tel que

$$x = \underbrace{a_2}_{\in A_1 \cup A_2} + \underbrace{b}_{\in B} \in (A_1 \cup A_2) + B.$$

Dans tous les cas $x \in (A_1 \cup A_2) + B$ et donc on a montré que $(A_1 + B) \cup (A_2 + B) \subset (A_1 \cup A_2) + B$.

Réciproquement, soit $x \in (A_1 \cup A_2) + B$. Alors il existe $a \in A_1 \cup A_2$ et $b \in B$ tel que $x = a + b$. Puisque $a \in A_1 \cup A_2$, alors $a \in A_1$ OU $a \in A_2$.

*Premier cas,* $a \in A_1$, alors $x = \underbrace{a}_{\in A_1} + \underbrace{b}_{\in B} \in A_1 + B \subset (A_1 + B) \cup (A_2 + B)$. Donc

$$x \in (A_1 + B) \cup (A_2 + B).$$

*Second cas,* $a \in A_2$, alors de même $x = \underbrace{a}_{\in A_2} + \underbrace{b}_{\in B} \in A_2 + B \subset (A_1 + B) \cup (A_2 + B)$. Donc

$$x \in (A_1 + B) \cup (A_2 + B)\,.$$

Ainsi, on a également $(A_1 \cup A_2) + B \subset (A_1 + B) \cup (A_2 + B)$.

Conclusion,

$$\boxed{(A_1 + B) \cup (A_2 + B) = (A_1 \cup A_2) + B.}$$

## Partie 2 : Une application dans $A + B$

On fixe dans cette partie $E = \mathbb{R}$ et on pose

$$A = \mathbb{Z} \qquad \text{et} \qquad B = \sqrt{2}\mathbb{Z} = \left\{ \sqrt{2}q \in \mathbb{R} \;\middle|\; q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Enfin on définit une application $f$ sur l'ensemble produit $A \times B$ par

$$f \quad : \quad \begin{aligned} A \times B &\to A + B \\ (p, u) &\mapsto p + u. \end{aligned}$$

5. On a

$$1 = \underbrace{1}_{\in \mathbb{Z} = A} + \underbrace{\sqrt{2} \times 0}_{\in \sqrt{2}\mathbb{Z} = B} \in A + B$$

Donc on a bien $\boxed{1 \in A + B}$. De même, on remarque que en prenant $p = 1 \in A$ et $u = 0 = 0\sqrt{2} \in B$, alors

$$f(p, u) = p + u = 1 + 0 = 1.$$

Donc 1 est l'image par $f$ d'un élément de $A \times B$. Conclusion,

$$\boxed{1 \in f(A \times B)\,.}$$

6. Soit $y \in A + B$. Alors il existe $p \in A$ et $u \in B$ tel que $y = p + u$. Donc

$$y = f(p, u) \in f(A \times B)\,.$$

Donc tout élément de $A + B$ admet un antécédent par $f$ dans $A \times B$. Donc $\boxed{f \text{ est surjective}}$.

7. Soient $(p, p') \in A^2$ et $(u, u') \in B^2$ tels que

$$f(p, u) = f(p', u')\,.$$

Puisque $u \in \sqrt{2}\mathbb{Z}$, alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $u = \sqrt{2}q$ et de même, il existe $q' \in \mathbb{Z}$ tel que $u' = \sqrt{2}q'$. Alors

$$\begin{aligned} f(p, u) = f(p', u') \qquad &\Rightarrow \qquad p + u = p' + u' \\ &\Rightarrow \qquad p + \sqrt{2}q = p' + \sqrt{2}q' \\ &\Rightarrow \qquad p - p' = \sqrt{2}(q' - q)\,. \end{aligned}$$

Supposons $q' \neq q$. Alors $\sqrt{2} = \frac{p-p'}{q'-q}$. Alors $\sqrt{2}$ est le quotient de deux entiers et est donc rationnel ce qui est absurde. Donc $q' = q$ puis $p - p' = \sqrt{2} \times 0 = 0$. D'où

$$p = p' \qquad \text{ET} \qquad q = q' \;\Rightarrow\; u = \sqrt{2}q = \sqrt{2}q' = u'.$$

Conclusion,

$$(p, u) = (p', u')\,.$$

Ceci démontre que $\boxed{f \text{ est injective}}$.

8. L'application $\boxed{f \text{ étant injective et surjective est par définition bijective}}$.

9. Soient $(p,u) \in A \times B$ et $(p',u') \in A \times B$. On a alors l'existence de $(q,q') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u = \sqrt{2}q$ et $u' = \sqrt{2}q'$. Ainsi,

$$f(p,u) \times f(p',u') = (p+u)(p'+u') = \left(p+\sqrt{2}q\right)\left(p'+\sqrt{2}q'\right) = \underbrace{pp'+2qq'}_{\in\mathbb{Z}=A} + \underbrace{\sqrt{2}\underbrace{(pq'+p'q)}_{\in\mathbb{Z}}}_{\in\sqrt{2}\mathbb{Z}=B}$$

On en déduit que

$$\boxed{f(p,u) \times f(p',u') \in A+B}.$$

De plus,

$$f(p,u) \times f(p',u') = f\left(pp'+2qq' \,;\, \sqrt{2}\left(pq'+p'q\right)\right).$$

Posons $\boxed{P = pp'+2qq'}$ et $\boxed{U = \sqrt{2}\left(pq'+p'q\right)}$. Alors on a bien $P \in \mathbb{Z} = A$ et $U \in \sqrt{2}\mathbb{Z} \in B$ et $f(p,u) \times f(p',u') = f(P,U)$.

# Problème III - Analyse asymptotique

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$.

## Partie 1 : Régularité et $DL_3(0)$ par deux méthodes

1. Déterminons un équivalent simple de $f$ en 0. On sait que $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$ donc $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$. Par quotient, on obtient,

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\sim} \frac{x}{x} = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\sim} 1.}$$

2. Montrons que $f$ est prolongeable par continuité. On appelle encore $f$ la nouvelle fonction prolongée par continuité. Précisons alors $f(0)$. On a par la question précédente,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } f(0) = 1.}$$

3. Montrons que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o\left(x^3\right).$$

On sait que $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$. Donc

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} &\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - 1} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)}. \end{aligned}$$

Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. On a

- $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- Puis

$$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o\left(x^3\right)\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o\left(x^3\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right) \\ &\qquad + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right) \\ &\qquad + o\left(x^3\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

- Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$, alors par élévation à la puissance, $u(x)^3 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{8}$ i.e.

$$u(x)^3 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right).$$

- Enfin,

$$o\left(u(x)^3\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+u(x)} \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - u(x) + u(x)^2 - u(x)^3 + o\left(u(x)^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \tfrac{x}{2} \quad - \tfrac{x^2}{6} \quad - \tfrac{x^3}{24} \quad + o\left(x^3\right) \\
&\qquad\qquad\quad + \tfrac{x^2}{4} \quad + \tfrac{x^3}{6} \quad + o\left(x^3\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - \tfrac{x^3}{8} \quad + o\left(x^3\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + o\left(x^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Encore vrai si $x = 0$. Conclusion, on obtient bien que

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o\left(x^3\right).}$$

4. Par la question précédente, on en déduit que $f$ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 (donné par $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o(x)$). Donc

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est dérivable en } 0.}$$

Cependant, rien ne nous garantit a priori que $f$ est $\mathscr{C}^1$ ni même a fortiori $\mathscr{C}^3$ en 0.

5. Précisons l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 et donnons également la position de cette tangente par rapport à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0. Par la question 3. on a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o\left(x^2\right).$$

Donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente en 0 d'équation

$$\boxed{y = 1 - \frac{x}{2}.}$$

De plus,

$$f(x) - \left(1 - \frac{x}{2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{12}$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x^2}{12} \geqslant 0$. Or deux équivalents ont le même signe au voisinage du point considéré. Conclusion,

$$\boxed{\text{au voisinage de 0, la courbe } \mathscr{C}_f \text{ est au-dessus de sa tangente en 0.}}$$

6. La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} = \frac{(1-x)\,\mathrm{e}^x - 1}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{(1-x)\,\mathrm{e}^x - 1}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}.}$$

7. Montrons que $f$ est $\mathscr{C}^1$ en 0. On a

$$\begin{aligned}(1-x)\,\mathrm{e}^x - 1 &\underset{x\to 0}{=} (1-x)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) - 1 \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) - x - x^2 + o\left(x^2\right) - 1 \\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right).\end{aligned}$$

Ainsi, $(1-x)\,\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$. D'autre part, $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$. Donc par élévation au carré $(\mathrm{e}^x - 1)^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$. Par quotient et la question précédente,

$$f'(x) = \frac{(1-x)\,\mathrm{e}^x - 1}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) = -\frac{1}{2}.$$

*Rédaction 1.* On a donc

- $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ par la question 2.
- $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$
- $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x)$ existe et vaut $-1/2$.

Conclusion, par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ en } 0 \text{ et } f'(0) = -\frac{1}{2}.}$$

*Rédaction 2.* Par la question 3. $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o(x)$. Donc la fonction $f$ est dérivable en 0 et de plus $f'(0) = -\frac{1}{2}$. De plus, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x) = -\dfrac{1}{2} = f'(0)$. Donc la fonction $f'$ est continue en 0. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ en } 0 \text{ et } f'(0) = -\frac{1}{2}.}$$

8. Déterminons un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f'$. On a

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
(1-x)\,\mathrm{e}^x - 1 &\underset{x\to 0}{=} (1-x)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right)-1\\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{ll} 1 & +x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right) \\ & -x-x^2-\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{6}+o\left(x^4\right) \\ -1 & \end{array}\\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{8}+o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{e}^x-1)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{llll} x^2 & +\frac{x^3}{2} & +\frac{x^4}{6} & +o\left(x^4\right) \\ & +\frac{x^3}{2} & +\frac{x^4}{4} & +o\left(x^4\right) \\ & & +\frac{x^4}{6} & +o\left(x^4\right) \\ & & & +o\left(x^4\right) \end{array}\\
&\underset{x\to 0}{=} x^2+x^3+\frac{7x^4}{12}+o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
f'(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{8}+o\left(x^4\right)}{x^2+x^3+\frac{7x^4}{12}+o\left(x^4\right)}\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{-\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{x^2}{8}+o\left(x^2\right)}{1+x+\frac{7x^2}{12}+o\left(x^2\right)}.
\end{aligned}$$

Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{7x^2}{12}+o\left(x^2\right)$. On a

- $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- De plus,
$$u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} x^2+o\left(x^2\right).$$
- Enfin,
$$o\left(u(x)^2\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2+o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right).$$

Or $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2+o\left(u^2\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
f'(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{x^2}{8}+o\left(x^2\right)\right)\left(1-x-\frac{7x^2}{12}+o\left(x^2\right)+x^2+o\left(x^2\right)+o\left(x^2\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{1}{2}-\frac{x}{3}-\frac{x^2}{8}+o\left(x^2\right)\right)\left(1-x+\frac{5x^2}{12}+o\left(x^2\right)\right)\\
&\begin{array}{llll} -\frac{1}{2} & +\frac{x}{2} & -\frac{5x^2}{24} & +o\left(x^2\right) \\ & -\frac{x}{3} & +\frac{x^2}{3} & +o\left(x^2\right) \\ & & -\frac{x^2}{8} & +o\left(x^2\right) \\ & & & +o\left(x^2\right) \end{array}\\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2}+\frac{x}{6}+o\left(x^2\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f'(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + o\left(x^2\right).}$$

*Ce qui est cohérent avec le DL de $f$ qui lorsqu'on le dérive on obtient bien celui de $f'$.*

9. Redémontrons le résultat de la question 3. La fonction $f$ est une primitive de $f'$ sur $\mathbb{R}_+$ et par la question précédente, $f'(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + o\left(x^2\right)$. Donc par le théorème de primitivation du développement limité,
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o\left(x^3\right).$$
Or par la question 2. $f(0) = 1$. Conclusion, on retrouve bien le résultat de la question 3.
$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o\left(x^3\right).}$$

10. Calculons le développement limité à l'ordre 2 en $\ln(3)$ de $f$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, posons $h = x - \ln(3)$ i.e. $x = \ln(3) + h$. Dès lors,
$$\begin{aligned}
f(x) &= f\left(\ln(3) + h\right)\\
&= \frac{\ln(3) + h}{\mathrm{e}^{\ln(3)+h} - 1}\\
&= \frac{\ln(3) + h}{3\,\mathrm{e}^{h} - 1}\\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{\ln(3) + h}{3\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + o\left(h^2\right)\right) - 1}\\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{\ln(3) + h}{2 + 3h + \frac{3h^2}{2} + o\left(h^2\right)}\\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(\ln(3) + h\right)\frac{1}{1 + \frac{3h}{2} + \frac{3h^2}{4} + o\left(h^2\right)}.
\end{aligned}$$
Posons $u(h) \underset{h\to 0}{=} \frac{3h}{2} + \frac{3h^2}{4} + o\left(h^2\right)$. On a
   - $u(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.
   - De plus,
   $$u(h)^2 \underset{h\to 0}{=} \frac{9h^2}{4} + o\left(h^2\right).$$
   - Enfin,
   $$o\left(u(h)^2\right) \underset{h\to 0}{=} o\left(\frac{9h^2}{4} + o\left(h^2\right)\right) \underset{h\to 0}{=} o\left(h^2\right).$$

   Puisque $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 + o\left(u^2\right)$, on obtient donc
$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(\ln(3) + h\right)\left(1 - \frac{3h}{2} - \frac{3h^2}{4} + o\left(h^2\right) + \frac{9h^2}{4} + o\left(h^2\right) + o\left(h^2\right)\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(\ln(3) + h\right)\left(1 - \frac{3h}{2} + \frac{3h^2}{2} + o\left(h^2\right)\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(\ln(3) - \frac{3\ln(3)}{2}h + \frac{3\ln(3)}{2}h^2 + o\left(h^2\right) + h - \frac{3h^2}{2} + o\left(h^2\right)\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{\ln(3)}{2} + \frac{2 - 3\ln(3)}{4}h - \frac{3\left(\ln(3) - 1\right)}{4}h^2 + o\left(h^2\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to\ln(3)}{=} \frac{\ln(3)}{2} + \frac{2-3\ln(3)}{4}\,(x-\ln(3)) - \frac{3\,(\ln(3)-1)}{4}\,(x-\ln(3))^2 + o\left((x-\ln(3))^2\right).}$$

*On remarque par ce qui précède que*

$$f\left(\ln(3)\right) = \frac{\ln(3)}{\mathrm{e}^{\ln(3)}-1} = \frac{\ln(3)}{3-1} = \frac{\ln(3)}{2}$$

*et*

$$f'\left(\ln(3)\right) = \frac{(1-\ln(3))\,\mathrm{e}^{\ln(3)}-1}{\left(\mathrm{e}^{\ln(3)}-1\right)^2} = \frac{3\,(1-\ln(3))-1}{4} = \frac{2-3\ln(3)}{4},$$

*ce qui est bien cohérent avec les deux premiers termes du DL !*

## Partie 2 : $DL_4(0)$

On souhaite améliorer le développement limité de $f$ et l'obtenir à l'ordre 4. On admet que $f$ possède un développement limité à l'ordre 4 en 0 donné par

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + a_4x^4 + o\left(x^4\right).$$

On admet également que $f'$ admet un développement limité à l'ordre 3 en 0.

11. Calculons le développement limité de $x \mapsto \mathrm{e}^x f(x)$ en 0 à l'ordre 4. On sait que $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x f(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right)\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + a_4x^4 + o\left(x^4\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{llllll}
1 & -\frac{x}{2} & +\frac{x^2}{12} & & +a_4x^4 & +o\left(x^4\right)\\
 & +x & -\frac{x^2}{2} & +\frac{x^3}{12} & & +o\left(x^4\right)\\
 & & +\frac{x^2}{2} & -\frac{x^3}{4} & +\frac{x^4}{24} & +o\left(x^4\right)\\
 & & & +\frac{x^3}{6} & -\frac{x^4}{12} & +o\left(x^4\right)\\
 & & & & +\frac{x^4}{24} & +o\left(x^4\right)\\
 & & & & & +o\left(x^4\right)
\end{array}\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + a_4x^4 + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{e}^x f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + a_4x^4 + o\left(x^4\right).}$$

12. Calculons le développement limité de $f'$ en 0 à l'ordre 3 en fonction de 4. On sait par hypothèse que $f'$ admet un développement limité à l'ordre 3 en 0. Soit $(b_0, b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^4$ les coefficients de ce développement limité :

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + o\left(x^3\right).$$

La fonction $f$ est une primitive de $f'$ sur $\mathbb{R}$. Donc par le théorème de primitivation du développement limité,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + b_0x + b_1\frac{x^2}{2} + b_2\frac{x^3}{3} + b_3\frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right).$$

Or par hypothèse,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + a_4 x^4 + o\left(x^4\right).$$

Donc par unicité du développement limité,

$$\begin{cases} f(0) = 1 \text{ OK} \\ b_0 = -\frac{1}{2} \\ \frac{b_1}{2} = \frac{1}{12} \\ \frac{b_2}{3} = 0 \\ \frac{b_3}{4} = a_4 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} b_0 = -\frac{1}{2} \\ b_1 = \frac{1}{6} \\ b_2 = 0 \\ b_3 = 4a_4. \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{f'(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + 4a_4 x^3 + o\left(x^3\right).}$$

*Ce qui est cohérent avec la question 8.*

13. Calculons le développement limité de $x \mapsto (\mathrm{e}^x - 1) f'(x)$ en 0 à l'ordre 4 en fonction de $a_4$. On a $\mathrm{e}^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$. Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{e}^x - 1) f'(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + 4a_4 x^3 + o\left(x^3\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{llllr} -\frac{x}{2} & +\frac{x^2}{6} & & +4a_4x^4 & +o\left(x^4\right) \\ & -\frac{x^2}{4} & +\frac{x^3}{12} & & +o\left(x^4\right) \\ & & -\frac{x^3}{12} & +\frac{x^4}{36} & +o\left(x^4\right) \\ & & & -\frac{x^4}{48} & +o\left(x^4\right) \\ & & & & +o\left(x^4\right) \end{array} \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \left(4a_4 + \frac{1}{3\times 12} - \frac{1}{4\times 12}\right)x^4 + o\left(x^4\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \left(4a_4 + \frac{1}{3\times 4\times 12}\right)x^4 + o\left(x^4\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \left(4a_4 + \frac{1}{144}\right)x^4 + o\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{(\mathrm{e}^x - 1) f'(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \left(4a_4 + \frac{1}{144}\right)x^4 + o\left(x^4\right).}$$

14. Simplifions pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = \mathrm{e}^x f(x) + (\mathrm{e}^x - 1) f'(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \neq 0$, on a par définition de $f$ et la question 6. on a

$$\begin{aligned}
A(x) &= \mathrm{e}^x \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} + (\mathrm{e}^x - 1)\frac{(1-x)\mathrm{e}^x - 1}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} \\
&= \frac{x\,\mathrm{e}^x + (1-x)\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - 1} \\
&= \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - 1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Si $x = 0$, on a vu que $f(0) = 1$ et $f'(0) = -\frac{1}{2}$. Donc

$$A(0) = f(0) + 0 \times f'(0) = 1.$$

Donc la formule reste vraie en 0. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad A(x) = 1.}$$

15. Concluons en donnant la valeur de $a_4$. Par les questions précédentes,

$$\begin{aligned}
1 = A(x) &= \mathrm{e}^x f(x) + (\mathrm{e}^x - 1) f'(x) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + a_4 x^4 + o\left(x^4\right) - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \left(4a_4 + \frac{1}{144}\right) x^4 + o\left(x^4\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(5a_4 + \frac{1}{12 \times 12}\right) x^4 + o\left(x^4\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(5a_4 + \frac{1}{144}\right) x^4 + o\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité,

$$\begin{cases} 1 = 1 \text{ OK !} \\ 5a_4 - \frac{5}{144} = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad a_4 = -\frac{1}{720}.$$

Conclusion,

$$\boxed{a_4 = -\frac{1}{720}.}$$

## Partie 3 : Une formule de récurrence pour l'ordre $n$

On admet dans cette partie que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On pose également

$$h : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{x \operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

16. Justifions que $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ en 0 et précisons pour tout $k \in [\![0;n]\!]$ $a_k$ en fonction de $f^{(k)}(0)$. Petite question gentille. On sait que $f$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc $f$ est $\mathscr{C}^n$ en 0. Donc par la formule de Taylor-Young,

$$\boxed{f \text{ admet un développement limité à l'ordre } n \text{ en } 0.}$$

De plus,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o\left(x^n\right).$$

Donc si on le note

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o\left(x^n\right), \qquad (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

par unicité du développement limité, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.}$$

17. Montrons que $h$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- Les fonctions sh et $x \mapsto x\,\mathrm{ch}(x)$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sh ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. Donc la fonction $h$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas.
- On sait que $\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$ et $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$. On observe donc que
$$h(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\sim} \frac{x}{x} = 1.$$
Donc
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} h(x) = 1 = h(0).$$
Ainsi, $h$ est continue en 0 et donc $h$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a
$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(\mathrm{ch}(x) + x\,\mathrm{sh}(x))\,\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}^2(x)}{\mathrm{sh}^2(x)} \\ &= \frac{\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x) + x\left(\mathrm{sh}^2(x) - \mathrm{ch}^2(x)\right)}{\mathrm{sh}^2(x)} \\ &= \frac{\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x) - x}{\mathrm{sh}^2(x)} \end{aligned}$$
On a
$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x) - x &\underset{x\to 0}{=} \left(1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)\left(x + o\left(x^2\right)\right) - x \\ &\underset{x\to 0}{=} x + o\left(x^2\right) + o\left(x^2\right) - x \\ &\underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right). \end{aligned}$$
De plus, $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\mathrm{sh}^2(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ ou encore $\mathrm{sh}^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 + o\left(x^2\right)$. Par suite,
$$h'(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{o\left(x^2\right)}{x^2 + o\left(x^2\right)} \underset{x\to 0}{=} \frac{o(1)}{1 + o(1)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
D'où $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} h'(x)$ existe et vaut 0.

Pour résumer, la fonction $h$ est continue sur $\mathbb{R}$, $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} h'(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. Conclusion, par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, $h$ est $\mathscr{C}^1$ en 0 et donc

$$\boxed{h \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

18. Déterminons un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $h$. On sait que $\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$ donc
$$x\,\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{2} + o\left(x^4\right).$$
De plus, $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)$. Donc pour $x \neq 0$,
$$h(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x + \frac{x^3}{2} + o\left(x^4\right)}{x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)}{1 + \frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right)}.$$
Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{6} + o\left(x^3\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors,

- on a
$$u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x^2}{6}+o\left(x^3\right)\right)\left(\frac{x^2}{6}+o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right).$$
- puis,
$$o\left(u(x)^2\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right).$$

Or $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2+o\left(u^2\right)$. Donc

$$\begin{aligned}
h(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{1+\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)}{1+u(x)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(1+\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)\right)\left(1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^3\right)+o\left(x^3\right)+o\left(x^3\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^3\right)+\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{3}+o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Encore vrai si $x=0$. Conclusion,

$$\boxed{h(x) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{3}+o\left(x^3\right).}$$

19. Montrons que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h(x)=f(2x)+x$. En déduisons-en que $h$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}^*$. On a

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{x\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} \\
&= \frac{x\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}}{\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}} \\
&= \frac{x\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}} \\
&= \frac{x\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)}{\mathrm{e}^{2x}-1} \\
&= \frac{x\left(\mathrm{e}^{2x}-1+2\right)}{\mathrm{e}^{2x}-1} \\
&= x+\frac{2x}{\mathrm{e}^{2x}-1} \\
&= x+f(2x).
\end{aligned}$$

Si $x=0$, on a vu que $h(0)=1$ et $x+f(2x)=0+f(0)=1$, donc la formule reste vraie en 0. Conclusion,

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad h(x)=f(2x)+x.}$$

La fonction $f$ est d'après l'énoncé $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Les fonctions $x\mapsto 2x$ et $x\mapsto x$ le sont aussi donc par composée et somme,

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

20. A l'aide des deux questions précédentes, retrouvons le résultat de la question 3. Par la question 16. on a :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+o\left(x^3\right).$$

Donc par la question précédente, et puisque $2x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient,

$$\begin{aligned} h(x) &= f(2x) + x \\ &\underset{x\to 0}{=} a_0 + 2a_1 x + 4a_2 x^2 + 8a_3 x^3 + o\left(x^3\right) + x \\ &\underset{x\to 0}{=} a_0 + (2a_1+1)\,x + 4a_2 x^2 + 8a_3 x^3 + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

Or par la question 18. $h(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{3} + o\left(x^3\right)$. Donc par unicité du développement limité,

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ 2a_1 + 1 = 0 \\ 4a_2 = \frac{1}{3} \\ 8a_3 = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -\frac{1}{2} \\ a_2 = \frac{1}{12} \\ a_3 = 0. \end{cases}}$$

Conclusion, on retrouve bien le résultat de la question 3.

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o\left(x^3\right).}$$

21. Précisons le développement limité à l'ordre $n$ en 0 de $h$ en fonction des $a_k$, $k \in [\![2;n]\!]$. On a $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right)$. Puisque $2x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on obtient par la question 19.

$$h(x) = f(2x) + x = a_0 + (1+2a_1)\,x + \sum_{k=2}^{n} 2^k a_k x^k + o\left(x^n\right) \qquad \text{car } n \geqslant 2.$$

Par la question précédente,

$$h(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right) x + \sum_{k=2}^{n} 2^k a_k x^k + o\left(x^n\right).$$

Conclusion le développement limité à l'ordre $n$ en 0 de $h$ est donné par

$$\boxed{h(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=2}^{n} 2^k a_k x^k + o\left(x^n\right).}$$

22. Montrons que pour tout $p \geqslant 1$, $a_{2p+1} = 0$. Le domaine de définition de $h$ est $\mathbb{R}$ et donc centré en 0. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$h(-x) = \frac{-x\,\mathrm{ch}(-x)}{\mathrm{sh}(-x)} = \frac{-x\,\mathrm{ch}(x)}{-\mathrm{sh}(x)} = \frac{x\,\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} = h(x).$$

De même si $x = 0$, $h(-0) = 1 = h(0)$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(-x) = h(x)$. Ainsi, la fonction $h$ est paire. Donc par propriété, son développement limité n'admet que des puissances paires. Par la question précédente, on obtient donc, pour tout $k \in [\![2;n]\!]$, $k$ impair :

$$2^k a_k = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a_k = 0.$$

Ceci étant vrai pour $n \geqslant 2$, quelconque, on en conclut que

$$\boxed{\forall p \geqslant 1, \quad a_{2p+1} = 0.}$$

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

23. Calculons la dérivée $n+1$-ième de $g : x \mapsto u(x)f(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}$ en fonction des $f^{(k)}(x)$ pour $k \in [\![2; n+1]\!]$. On sait que $f$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De même $u$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par produit, $g$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus par la formule de Leibniz, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$g^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) u^{(n+1-k)}(x).$$
Or pour tout $k \geqslant 1$, $u^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$. Donc
$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x)\,\mathrm{e}^x + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)}(x) u^{(0)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x)\,\mathrm{e}^x + f^{(n+1)}(x)\left(\mathrm{e}^x - 1\right). \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\forall n \geqslant 2,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x)\,\mathrm{e}^x + f^{(n+1)}(x)\left(\mathrm{e}^x - 1\right).$$

24. Déduisons-en que
$$a_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n+1-k)!}$$
On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$g(x) = u(x)f(x) = \left(\mathrm{e}^x - 1\right) f(x) = x,$$
et $g(0) = u(0)f(0) = (1-1) \times 1 = 0$. Donc la formule reste vraie en 0. Ainsi,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = x.$$
Donc pour tout $n \geqslant 1$, $g^{(n+1)}(x) = 0$. Par la question précédente, pour $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$,
$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x)\,\mathrm{e}^x + f^{(n+1)}(x)\left(\mathrm{e}^x - 1\right).$$
En particulier, pour $x = 0$,
$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(0)$$
Or on a vu que $\forall k \in [\![0; n]\!]$, $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ donc $f^{(k)}(0) = k! a_k$. Ainsi,
$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} k! a_k \\ &= (n+1)! \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(n+1-k)!} \\ &= (n+1)! \frac{a_n}{(n+1-n)!} + (n+1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n+1-k)!} \\ &= (n+1)! a_n + (n+1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n+1-k)!}. \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{a_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n+1-k)!}.}$$

25. Retrouvons alors le résultat de la question 15. Par la question 20. $a_0 = 1$, $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{12}$ et $a_3 = 0$. Ainsi, par la question précédente,

$$\begin{aligned}
a_4 &= -\sum_{k=0}^{3} \frac{a_k}{(5-k)!} \\
&= -\left(\frac{a_0}{5!} + \frac{a_1}{4!} + \frac{a_2}{3!} + \frac{a_3}{2!}\right) \\
&= -\left(\frac{1}{120} - \frac{1}{2 \times 24} + \frac{1}{12 \times 6} + 0\right) \\
&= -\left(\frac{1}{120} - \frac{1}{4 \times 12} + \frac{1}{12 \times 6}\right) \\
&= -\left(\frac{1}{12 \times 10} \frac{-3+2}{12^2}\right) \\
&= -\frac{12 - 10}{144 \times 10} \\
&= -\frac{1}{72 \times 10} \\
&= -\frac{1}{720}.
\end{aligned}$$

Hourra ! Conclusion, on retrouve bien le résultat de la question 15.

$$\boxed{a_4 = -\frac{1}{720}.}$$

Fin du corrigé