Epreuve de mathématiques 6
2024-2025

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

lycée Raoul Follereau

Problème 1 - Suites

Soit $f : x \mapsto x - \ln(x)$.

Partie 1 : Etude de f

1. Donner le tableau de variation complet de f.
2. Vérifier que $f([1;2]) \subseteq [1;2]$.
3. Montrer que f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1;2]$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, il existe un unique réel $x_n \in]0;1[$ et un unique réel $y_n \in]1;+\infty[$ tels que $f(x_n) = f(y_n) = n$.

Partie 2 : Une première suite implicite

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Comparer $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement monotone.
6. Justifier que $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge. On note ℓ sa limite.
7. Déterminer ℓ.
8. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $x_n = \mathrm{e}^{-n+x_n}$.
9. En déduire que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n} + o(\mathrm{e}^{-n})$.
10. Montrer que
$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e}^{-2n} + \frac{3\,\mathrm{e}^{-3n}}{2} + o\left(\mathrm{e}^{-3n}\right).$$

Partie 3 : Une seconde suite implicite

11. Montrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement monotone.
12. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.
13. Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\ln(2x) < x$.
14. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $n < y_n < 2n$.
15. Déterminer un équivalent simple de y_n quand $n \to +\infty$.
16. Montrer que
$$y_n \underset{n\to+\infty}{=} n + \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Partie 4 : Une suite récurrente

On fixe $u_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_{n+1} = f(u_n)$.

17. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [1;2]$.
18. Donner une représentation graphique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
19. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et préciser sa monotonie.
20. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \prod\limits_{k=0}^{n} u_k$.

21. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \geqslant 1$.
22. Montrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
23. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \ln(u_k) = u_0 - u_{n+1}$.
24. En déduire que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
25. A l'aide de la partie 1 montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(u_n - 1)$.
26. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Exercice 2 - Polynômes

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Préciser P_0, P_1, P_2 et P_3.
2. Déterminer les deux racines complexes de P_2. En déduire la factorisation de P_2 dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Le polynôme P_2 est-il scindé dans $\mathbb{C}[X]$? Irréductible dans $\mathbb{C}[X]$?
   Scindé dans $\mathbb{R}[X]$? Irréductible dans $\mathbb{R}[X]$?
4. Calculer P_3'.
5. Montrer que P_3 n'admet pas de racine multiple (i.e. de multiplicité supérieure ou égale à 2).
6. Exprimer P_n' en fonction de P_{n-1}.
7. Donner une relation entre P_n et P_n'.
8. En déduire que P_n n'admet que des racines simples.

Exercice 3 - Polynômes

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit (E_n) l'équation suivante d'inconnue un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P(X+2) - P(X) = X^n \qquad \text{et} \qquad P(0) = 0 \qquad\qquad (E_n)$$

On pose également (E) l'équation suivante d'inconnue un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P(X+2) - P(X) = 0 \qquad\qquad (E)$$

1. Déterminer avec soin si le polynôme $P = 1$ est une solution d'une des équations (E) ou (E_n), $n \in \mathbb{N}$.
   Même question pour les polynômes $\frac{X}{2}$ et $\frac{X^2}{2}$.
2. (a) Soit P une solution de (E) telle que $\deg(P) \geqslant 1$. Justifier à l'aide d'un théorème du cours qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = 0$.
   (b) Montrer alors proprement que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha + 2k$ est aussi une racine de P.
   (c) En déduire l'ensemble de solution de (E).
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (E_n) admet au plus une solution.
4. Soit P une solution de (E_n).
   (a) Déterminer une équation vérifiée par $P^{(n+1)}$.
   (b) En déduire que $\deg(P) \leqslant n+1$.
5. Résoudre (E_1).

Problème 4 - Espaces vectoriels

Partie 1 : Espaces de polynômes

On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = P(-1) = 0_{\mathbb{R}} \}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont en somme directe.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Préciser le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X+1)$.
4. En déduire que F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires.

Partie 2 : Espaces d'un endomorphisme

On suppose maintenant que $E = \mathbb{R}_4[X]$ et on considère l'application

$$f : \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & (X^2 - X)\, P(1) + (X^2 + X)\, P(-1)\,. \end{array}$$

On appelle noyau de f l'ensemble

$$\operatorname{Ker}(f) = \left\{ P \in E \;\middle|\; f(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \right\}.$$

On appelle image de f l'ensemble

$$\operatorname{Im}(f) = f(E) = \{ Q \in \mathbb{R}[X] \mid \exists P \in E,\ f(P) = Q \}.$$

5. (a) Montrer que $\operatorname{Ker}(f) = F$.
   (b) Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$.
6. (a) Montrer que $\operatorname{Im}(f)$ est un espace vectoriel.
   (b) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que
   $$Q \in \operatorname{Im}(f) \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ Q = a\left(X^2 - X\right) + b\left(X^2 + X\right).$$
   Pour un sens on pourra calculer l'image de $P = \frac{a-b}{2}X + \frac{a+b}{2}$.
   (c) Déterminer une base de $\operatorname{Im}(f)$.
7. Montrer que $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.
8. A-t-on $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}_1[X]$?

Partie 3 : Espaces de fonctions

On fixe $I =]-1;+\infty[$ et $E = \mathscr{C}^2(I,\mathbb{R})$. On considère alors

$$\begin{aligned}
F &= \{ f \in E \mid \forall t \in I,\ (t+1)\, f''(t) + (t-1)\, f'(t) - 2f(t) = 0 \} \\
G &= \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid (X+1)\, P'' + (X-1)\, P' - 2P = 0 \} \\
H &= \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\, \mathrm{e}^{\alpha x} \end{array} \,\middle|\, (\lambda,\alpha) \in \mathbb{R}^2 \right\}.
\end{aligned}$$

9. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
10. Montrer que H n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
11. On admet que G est un espace vectoriel. Déterminer une base de G.
12. Calculer $F \cap H$. Est-ce un espace vectoriel ?
13. Soit $f \in E$. On pose $g = f + f'$. Montrer que $f \in F$ si et seulement si g est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 que l'on déterminera.
14. En déduire F.
15. Préciser une base de F.

On pose $F' = \{ f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0 \}$. On admet que F' est un espace vectoriel.

16. Démontrer que F et F' sont supplémentaires dans E.

Fin de l'épreuve