Commentaires du DS6
Suites, polynômes et espaces vectoriels

La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{55}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	P1.1	P1.2	P1.3	P1.4	P1	P2	P3	P4.1	P4.2	P4.3	P4	Total	Note finale
Moyenne	-1,1	4	2,1	0,5	2,2	8,8	6,6	2,5	1,5	0,3	0,5	2,3	19,1	8,35
Sur		8	15	12	20	55	17	18	8	14	18	40	130	20

TOTAL : 130 pt

Problème I - Suites 55 pt

Soit $f : x \mapsto x - \ln(x)$.

Partie 1 : Etude de f 8 pt

1. **2 pt** Donner le tableau de variation complet de f.

   Assez bien réussie dans l'ensemble. Je note que trois étudiants bloquent complètement sur une telle question. N'oubliez pas de justifier que f est dérivable avant de la dérivée. N'oubliez pas non plus de calculer les limites avant de faire le tableau de variations. L'une des deux limites exige de la croissance comparée mais une seule limite seulement.

2. **2 pt** Vérifier que $f([1;2]) \subset [1;2]$.

   Pas souvent très bien rédiger. Il faut invoquer

   - la continuité,
   - la **stricte** monotonie,
   - le théorème de la bijection.

   L'inégalité $\ln(2) > 0$ n'est pas toujours très claire pour tout le monde.

3. **2 pt** Montrer que f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1;2]$.

   Une grande classique que l'on a déjà vue de nombreuses fois et pourtant question bien moins réussie qu'avant. Ce qui prouve que vos apprentissages sont bien trop superficiels. Beaucoup me parle de fonction continue sur $[1;2]$ au lieu de $[a;b]$. D'autres parachutent la majoration de $|f'(c)| \leqslant \frac{1}{2}$. La gestion des valeurs absolues enfin est souvent compliquée.

4. **2 pt** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, il existe un unique réel $x_n \in]0;1[$ et un unique réel $y_n \in]1;+\infty[$ tels que $f(x_n) = f(y_n) = n$.

   Encore trop de réponses inexactes. Il faut là aussi bien citer les hypothèses et le théorème. Notamment bien faire apparaitre que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) > n > f(1)$ par exemple pour x_n.

Partie 2 : Une première suite implicite 15 pt

5. **3 pt** Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Comparer $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$. En déduire que la suite $(x_n)_{n \geqslant 2}$ est strictement monotone.

   Quelques bonnes réponses mais pas beaucoup. Quelques parachutages. Question pas très difficile en réalité.

6. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Justifier que $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge. On note ℓ sa limite.
   Des points facilement prenables mais attention à bien justifier que $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est minorée ce qui n'est pas toujours très claire.
7. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Déterminer ℓ.
   Peu traitée et aucune bonne réponse.
8. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $x_n = \mathrm{e}^{-n+x_n}$.
   Facile et réussie lorsqu'elle est abordée.
9. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n} + o\left(\mathrm{e}^{-n}\right)$.
   Non réussie.
10. $\boxed{4 \text{ pt}}$ Montrer que
   $$x_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e}^{-2n} + \frac{3\,\mathrm{e}^{-3n}}{2} + o\left(\mathrm{e}^{-3n}\right).$$
   Non traitée.

Partie 3 : Une seconde suite implicite $\boxed{12 \text{ pt}}$

11. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement monotone.
   Une ou deux bonnes réponses. Quelques forçages.
12. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.
   Non réussie.
13. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\ln(2x) < x$.
   Une ou deux bonnes réponses.
14. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $n < y_n < 2n$.
   Non réussie.
15. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Déterminer un équivalent simple de y_n quand $n \to +\infty$.
   Aïe !! Plusieurs fois j'ai vu $2n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. Aïe aïe aïe.
16. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que
   $$y_n \underset{n\to+\infty}{=} n + \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$
   Non traitée.

Partie 4 : Une suite récurrente $\boxed{20 \text{ pt}}$

On fixe $u_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_{n+1} = f(u_n)$.

17. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [1;2]$.
   Par récurrence, quelques bonnes réponses. L'existence de u_{n+1} n'est pas toujours très claire, c'est parce que u_n appartient à l'ensemble de définition de f. Il fallait invoquer ensuite la question 2.
18. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Donner une représentation graphique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Facile mais aucune bonne réponse.

19. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et préciser sa monotonie.
Quelques belles réponses.

20. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
Une ou deux bonnes réponses.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$.

21. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \geqslant 1$.
Quelques bonnes réponses.

22. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Idem.

23. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \ln(u_k) = u_0 - u_{n+1}$.
Deux ou trois belles réponses.

24. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
Une ou deux belles réponses.

25. $\boxed{2 \text{ pt}}$ A l'aide de la partie 1 montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(u_n - 1)$.
Idem

26. $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n}\right)$.
Non réussie.

Exercice II - Polynômes $\boxed{17 \text{ pt}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Préciser P_0, P_1, P_2 et P_3.
Pas évidente pour tout le monde, apparemment le signe somme est parfois passé à la trappe.

2. $\boxed{3 \text{ pt}}$ Déterminer les deux racines complexes de P_2. En déduire la factorisation de P_2 dans $\mathbb{C}[X]$.
Bien globalement pour les racines. Plusieurs ont parlé de $\sqrt{|\Delta|}$, pourquoi pas mais souvenez-vous surtout de la formule avec δ UNE racine carrée complexe de Δ (avec les méthodes pour calculer δ dans les cas plus généraux). Quelques oublies du coefficient dominant $\frac{1}{2}$ pour la factorisation mais pas tant que cela, c'est bien.

3. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Le polynôme P_2 est-il scindé dans $\mathbb{C}[X]$? Irréductible dans $\mathbb{C}[X]$?
Scindé dans $\mathbb{R}[X]$? Irréductible dans $\mathbb{R}[X]$?
Pas beaucoup de bonnes réponses à cette question de cours...

4. $\boxed{2 \text{ pt}}$ Calculer P_3'.
Facile ! Bien mais attention parfois à la rédaction !

5. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que P_3 n'admet pas de racine multiple (i.e. de multiplicité supérieure ou égale à 2).
   Pas clair pour tout le monde. Plusieurs regardent si les racines précédentes sont multiples ou non. Bonne idée en général mais un chouille plus long ici que la méthode du corrigé.

6. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Exprimer P_n' en fonction de P_{n-1}.
   Assez peu de bonnes réponses. Attention $P_n' = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{X^k}{k!}\right)'$ et non $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{X^k}{k!}\right)'$

7. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Donner une relation entre P_n et P_n'.
   Assez peu mais quelques bonnes réponses.

8. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire que P_n n'admet que des racines simples.
   Une ou deux bonnes réponses.

Exercice III - Polynômes $\boxed{\textbf{18 pt}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit (E_n) l'équation suivante d'inconnue un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P(X+2) - P(X) = X^n \qquad \text{et} \qquad P(0) = 0 \qquad\qquad (E_n)$$

On pose également (E) l'équation suivante d'inconnue un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P(X+2) - P(X) = 0 \qquad\qquad (E)$$

1. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déterminer avec soin si le polynôme $P = 1$ est une solution d'une des équations (E) ou (E_n), $n \in \mathbb{N}$.
   $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Même question pour les polynômes $\frac{X}{2}$ et $\frac{X^2}{2}$.
   Beaucoup plus traitée mais beaucoup d'erreurs alors que la question ne présente pas de difficulté. Je rappelle que $1 = X^n$ est possible pour $n = 0$ (et uniquement $n = 0$).

2. (a) $\boxed{\textbf{1 pt}}$ Soit P une solution de (E) telle que $\deg(P) \geqslant 1$. Justifier à l'aide d'un théorème du cours qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = 0$.
   Bien.
   (b) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer alors proprement que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha + 2k$ est aussi une racine de P.
   Moins souvent traitée que je ne pensais. Pas de difficulté.
   (c) $\boxed{\textbf{3 pt}}$ En déduire l'ensemble de solution de (E).
   Une ou deux bonnes réponses.

3. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (E_n) admet au plus une solution.
   Non traitée.

4. Soit P une solution de (E_n).
   (a) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déterminer une équation vérifiée par $P^{(n+1)}$.
   Non traitée.
   (b) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire que $\deg(P) \leqslant n+1$.
   Non traitée.

5. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Résoudre (E_1).
   Non traitée.

Problème IV - Espaces vectoriels $\boxed{40\text{ pt}}$

Partie 1 : Espaces de polynômes $\boxed{8\text{ pt}}$

On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = P(-1) = 0_{\mathbb{R}}\}$.

1. $\boxed{2\text{ pt}}$ Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

   Question très très classique mais encore non réussie pour un tiers de la classe, ce qui est très inquiétant pour ce tiers de classe. Il faut travailler et retravailler de façon bien plus consciencieuse les questions archi-classiques, c'est absolument nécessaire.

2. $\boxed{2\text{ pt}}$ Montrer que F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont en somme directe.

   Quelques bonnes réponses. Un ou deux ont pensé à parler de racines. D'autres on poser $P = aX + b$. Question assez facile lorsque l'on connait ses définitions.

3. $\boxed{2\text{ pt}}$ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Préciser le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X+1)$.

   Plusieurs tentatives mais très peu de succès. Là aussi l'exercice a déjà été abordé en classe.

4. $\boxed{2\text{ pt}}$ En déduire que F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires.

   Non réussie. Il fallait revenir à la définition de la décomposition de P comme un élément de F plus un élément de $\mathbb{R}_1[X]$ grâce à la question précédente.

Partie 2 : Espaces d'un endomorphisme $\boxed{14\text{ pt}}$

On suppose maintenant que $E = \mathbb{R}_4[X]$ et on considère l'application

$$f : \begin{array}{ccl} E & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & \left(X^2 - X\right)P(1) + \left(X^2 + X\right)P(-1). \end{array}$$

On appelle noyau de f l'ensemble

$$\operatorname{Ker}(f) = \left\{P \in E \;\middle|\; f(P) = 0_{\mathbb{R}[X]}\right\}.$$

On appelle image de f l'ensemble

$$\operatorname{Im}(f) = f(E) = \{Q \in \mathbb{R}[X] \mid \exists P \in E,\ f(P) = Q\}.$$

5. (a) $\boxed{2\text{ pt}}$ Montrer que $\operatorname{Ker}(f) = F$.

   Très peu réussie. Quelques-uns commencent bien par poser $\left(X^2 - X\right)P(1) + \left(X^2 + X\right)P(-1) = 0$ mais ne savent pas traduire cette égalité. Il fallait invoquer l'unicité des coefficients d'un polynôme, cf corrigé.

   (b) $\boxed{2\text{ pt}}$ Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

   Une ou deux bonnes réponses alors que la question ne présente pas de difficulté particulière.

6. (a) $\boxed{2\text{ pt}}$ Montrer que $\operatorname{Im}(f)$ est un espace vectoriel.

   Non traitée.

   (b) $\boxed{2\text{ pt}}$ Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que

   $$Q \in \operatorname{Im}(f) \quad \Leftrightarrow \quad \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ Q = a\left(X^2 - X\right) + b\left(X^2 + X\right).$$

   Pour un sens on pourra calculer l'image de $P = \frac{a-b}{2}X + \frac{a+b}{2}$.

   Quelques tentatives confuses.

(c) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déterminer une base de $\operatorname{Im}(f)$.

Une ou deux bonnes réponses. Question facile grâce à la question précédente.

7. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.

   Une seule bonne réponse.

8. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ A-t-on $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}_1[X]$?

   Une seule bonne réponse.

Partie 3 : Espaces de fonctions

On fixe $I =]-1;+\infty[$ et $E = \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$. On considère alors

$$F = \left\{ f \in E \;\middle|\; \forall t \in I,\ (t+1)\, f''(t) + (t-1)\, f'(t) - 2f(t) = 0 \right\}$$
$$G = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \;\middle|\; (X+1)\, P'' + (X-1)\, P' - 2P = 0 \right\}$$
$$H = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\, \mathrm{e}^{\alpha x} \end{array} \;\middle|\; (\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

9. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

   Peu de tentatives, quelques bonnes réponses.

10. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que H n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

    Non réussie. Plusieurs pensent que $0_E \notin H$ alors qu'en prenant $\lambda = 0$, on récupère bien 0_E. Il fallait montrer (par un contre-exemple) que H n'est pas stable par somme.

11. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ On admet que G est un espace vectoriel. Déterminer une base de G.

    Non traitée.

12. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Calculer $F \cap H$. Est-ce un espace vectoriel ?

    Non traitée.

13. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Soit $f \in E$. On pose $g = f + f'$. Montrer que $f \in F$ si et seulement si g est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 que l'on déterminera.

    Non réussie.

14. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire F.

    Non traitée.

15. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Préciser une base de F.

    Non traitée.

On pose $F' = \{ f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0 \}$. On admet que F' est un espace vectoriel.

16. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Démontrer que F et F' sont supplémentaires dans E.

    Non traitée.