Corrigé du Devoir Surveillé 6
Suites, polynômes, espaces vectoriels

Problème I - Suites

Soit $f : x \mapsto x - \ln(x)$.

Partie 1 : Etude de f

1. Donnons le tableau de variation complet de f. La fonction f est définie, continue et même dérivable sur $]0; +\infty[$ comme différence de fonctions qui le sont. De plus,

$$\forall x \in \left]0; +\infty\right[, \qquad f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Donc pour $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$ et $f'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$. De plus,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0 - (-\infty) = +\infty, \qquad f(1) = 1$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty \text{ par croissance comparée.}$$

Conclusion,

x	0	1	$+\infty$
f	$+\infty$ $\searrow$	1	$\nearrow$ $+\infty$

2. Vérifions que $f([1; 2]) \subset [1; 2]$. On sait que f est continue sur $[1; 2]$ et strictement croissante sur $[1; 2]$. Donc par le théorème de la bijection, $f([1; 2]) = [f(1); f(2)]$. Or $f(1) = 1$ et $f(2) = 2 - \ln(2) \leqslant 2$. Donc

$$f([1; 2]) = [1; 2 - \ln(2)] \subset [1; 2].$$

Conclusion,

$$\boxed{f([1; 2]) \subset [1; 2].}$$

3. Montrons que f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1; 2]$. Par la question 1. pour tout $x \in [1; 2]$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$. Or pour tout $x \in [1; 2]$,

$$\begin{aligned}
1 \leqslant x \leqslant 2 \qquad &\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 1\\
&\Leftrightarrow \qquad -1 \leqslant -\frac{1}{x} \leqslant -\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x \in [1;2]\,, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Soit $(x,y) \in [1;2]$, $x \neq y$. La fonction f est continue sur $[x;y]$ ou $[y;x]$ et dérivable sur $]x;y[$ ou $]y;x[$. Donc par le théorème des accroissements finis,

$$\exists c \in \left]x;y\right[\,, \ \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c).$$

Puisque $c \in]x;y[\subset [1;2]$, on obtient que

$$|f(x)-f(y)| = |f'(c)|\,|x-y| \leqslant \frac{1}{2}\,|x-y|\,,$$

ce qui reste vrai si $x=y$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } \frac{1}{2}\text{-lipschitzienne.}}$$

4. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, il existe un unique réel $x_n \in]0;1[$ et un unique réel $y_n \in]1;+\infty[$ tels que $f(x_n) = f(y_n) = n$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Par la question 1. la fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0;1[$. De plus, comme $n \geq 2$,

   $$f(1) = 1 < n < +\infty = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x).$$

   Donc par le théorème de la bijection,

   $$\exists! x_n \in \left]0;1\right[\,, \quad n = f(x_n)\,.$$

   De même, la fonction f est continue sur $]1;+\infty[$, strictement croissante sur $]1;+\infty[$ et $f(1) = 1 < n < lim_{x\to+\infty} f(x)$. Donc par le théorème de convergence monotone,

   $$\exists! y_n \in \left]1;+\infty\right[\,, \quad n = f(y_n)\,.$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, \quad \exists!\,(x_n, y_n) \in \left]0;1\right[\times \left]1;+\infty\right[\,, \qquad f(x_n) = f(y_n) = n.}$$

Partie 2 : Une première suite implicite

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Comparons $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$ et montrons que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement monotone.

   On a $f(x_n) = n$ et $f(x_{n+1}) = n+1$. Donc

   $$\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad f(x_n) < f(x_{n+1})\,.}$$

   Or la fonction f est strictement décroissante sur $]0;1[$ et par définition, $x_n \in]0;1[$ et $x_{n+1} \in]0;1[$. D'où,

   $$\forall n \geqslant 2, \quad x_n > x_{n+1}$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\geqslant 2} \text{ est strictement décroissante.}}$$

6. Justifions que $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge.

   Par la question précédente, $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement décroissante. De plus, par construction, pour tout $n \geqslant 2$, $x_n > 0$ donc $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est minorée. Conclusion, par le théorème de convergence monotone,

$$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\geqslant 2} \text{ converge.}}$$

   On note ℓ sa limite.

7. Déterminer ℓ. Puisque pour tout $n \geqslant 2$, $0 < x_n < 1$, on en déduit que $\ell \in [0;1]$. Supposons $\ell \neq 0$ i.e. $\ell \in]0;1]$. Comme pour tout $n \geqslant 2$,

$$n = f(x_n),$$

   Par continuité de la fonction f sur $]0;1]$ et la caractérisation séquentielle de la continuité, on en déduit que

$$+\infty = \lim_{x\to+\infty} n = \lim_{x\to+\infty} f(x_n) = f(\ell) \in \mathbb{R}.$$

   Contradiction. Conclusion,

$$\boxed{\ell = 0.}$$

8. Montrons que pour tout $n \geqslant 2$, $x_n = \mathrm{e}^{-n+x_n}$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} f(x_n) = n \quad &\Leftrightarrow \quad x_n - \ln(x_n) = n \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(x_n) = x_n - n \\ &\Leftrightarrow \quad x_n = \mathrm{e}^{x_n-n} = \mathrm{e}^{-n+x_n}. \end{aligned}$$

   Conclusion,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad x_n = \mathrm{e}^{-n+x_n}.}$$

9. Montrons que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n} + o(\mathrm{e}^{-n})$. Par la question précédente, pour tout $n \geqslant 2$, $x_n = \mathrm{e}^{-n+x_n}$. De plus, par la question 7. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell = 0$. Donc $x_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} x_n = \mathrm{e}^{-n+x_n} &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n+o(1)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n}\,\mathrm{e}^{o(1)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n}(1+o(1)) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n} + o\left(\mathrm{e}^{-n}\right). \end{aligned}$$

   Conclusion,

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n} + o\left(\mathrm{e}^{-n}\right).}$$

10. Montrons que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e}^{-2n} + \frac{3\,\mathrm{e}^{-3n}}{2} + o\left(\mathrm{e}^{-3n}\right)$. Par la question 8. $x_n = \mathrm{e}^{-n+x_n}$. Donc en réinjectant l'expression obtenue à la question précédente, on obtient que

$$\begin{aligned} x_n &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n+\mathrm{e}^{-n}+o\left(\mathrm{e}^{-n}\right)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-n}+o\left(\mathrm{e}^{-n}\right)}. \end{aligned}$$

   Posons $u \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n} + o(\mathrm{e}^{-n}) \underset{n\to+\infty}{0}$, alors,

$$o(u) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{-n} + o\left(\mathrm{e}^{-n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{-n}\right).$$

Or $\mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} 1+u+o(u)$. Donc

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n}\left(1+\mathrm{e}^{-n}+o\left(\mathrm{e}^{-n}\right)+o\left(\mathrm{e}^{-n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n}+\mathrm{e}^{-2n}+o\left(\mathrm{e}^{-2n}\right).$$

On réitère alors la méthode :

$$\begin{aligned} x_n = \mathrm{e}^{-n+x_n} &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n+\mathrm{e}^{-n}+\mathrm{e}^{-2n}+o\left(\mathrm{e}^{-2n}\right)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n}\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-n}+\mathrm{e}^{-2n}+o\left(\mathrm{e}^{-2n}\right)}. \end{aligned}$$

Posons $u=\mathrm{e}^{-n}+\mathrm{e}^{-2n}+o\left(\mathrm{e}^{-2n}\right)$. On observe alors les points suivants :

- $u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- De plus,

$$\begin{aligned} u^2 &\underset{n\to+\infty}{=} \left(\mathrm{e}^{-n}+\mathrm{e}^{-2n}+o\left(\mathrm{e}^{-2n}\right)\right)\left(\mathrm{e}^{-n}+\mathrm{e}^{-2n}+o\left(\mathrm{e}^{-2n}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-2n}+o\left(\mathrm{e}^{-2n}\right). \end{aligned}$$

- Et donc,

$$o\left(u^2\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{-2n}+o\left(\mathrm{e}^{-2n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{-2n}\right).$$

Or $\mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} 1+u+\frac{u^2}{2}+o\left(u^2\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} x_n &= \mathrm{e}^{-n}\,\mathrm{e}^{u} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n}\left(1+\mathrm{e}^{-n}+\mathrm{e}^{-2n}+o\left(\mathrm{e}^{-2n}\right)+\frac{\mathrm{e}^{-2n}}{2}+o\left(\mathrm{e}^{-2n}\right)+o\left(\mathrm{e}^{-2n}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n}+\mathrm{e}^{-2n}+\frac{3\,\mathrm{e}^{-3n}}{2}+o\left(\mathrm{e}^{-3n}\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{-n}+\mathrm{e}^{-2n}+\frac{3\,\mathrm{e}^{-3n}}{2}+o\left(\mathrm{e}^{-3n}\right).}$$

Partie 3 : Une seconde suite implicite

11. Montrons que la suite $(y_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante. Appliquons le même méthode qu'à la question 5. Pour tout $n\geqslant 2$,

$$f(y_n)=n<n+1=f(y_{n+1}).$$

Or par la question 1. la fonction f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$ et par définition de $(y_n)_{n\geqslant 2}$, pour tout $n\geqslant 2$, $y_n\in\,]1;+\infty[$ et donc $y_{n+1}\in\,]1;+\infty[$. Ainsi,

$$y_n<y_{n+1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la suite } (y_n)_{n\geqslant 2} \text{ est strictement croissante.}}$$

12. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=+\infty$. Par la question précédente et le théorème de convergence monotone, on en déduit que seul deux cas sont possibles :

- ou la suite $(y_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers un réel $y\in\mathbb{R}$ fixé,
- ou la suite $(y_n)_{n\geqslant 2}$ diverge vers $+\infty$.

Supposons que $(y_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers un réel $y \in \mathbb{R}$ fixé. Puisque pour tout $n \geqslant 2$, $y_n > 1$, alors par passage à la limite, $y \geqslant 1$. On sait que pour tout $n \geqslant 2$,

$$n = f(y_n) = y_n - \ln(y_n).$$

Dès lors, par passage à la limite, la continuité de f et la caractérisation séquentielle de la continuité,

$$+\infty = f(y) = y - \ln(y) \in \mathbb{R}.$$

Contradiction. Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty.}$$

13. Montrons que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $ln(2x) < x$. Posons $g : x \mapsto x - \ln(2x)$. La fonction g est définie et même dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Ainsi, de façon similaire à la question 1. on obtient

x	0		1		$+\infty$
g	$+\infty$	$\searrow$	$1-\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Or $2 < \mathrm{e}$ donc $\ln(2) < 1$ et donc $1 - \ln(2) > 0$. D'où pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g(x) > 1 - \ln(2) > 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in]0;+\infty[\,, \quad \ln(2x) < x.}$$

14. Montrons que pour tout $n \geqslant 2$, $n < y_n < 2n$. Soit $n \geqslant 2$. On observe que

$$f(n) = n - \ln(n) < n \qquad \text{car } n > 1 \text{ et donc } \ln(n) > 0.$$

Or $f(y_n) = n$ donc $f(n) < f(y_n)$. De plus, $n \in]1;+\infty[$, $y_n \in]1;+\infty[$ et la fonction f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$. Ainsi,

$$n < y_n.$$

De même, on a

$$f(2n) = 2n - \ln(2n).$$

Or par la question précédente, $\ln(2n) < n$ donc

$$f(2n) > 2n - n = n = f(y_n).$$

De plus, $2n \in]1;+\infty[$ et $y_n \in]1;+\infty[$ donc par la stricte croissance de f sur $]1;+\infty[$, on en déduit que

$$2n > y_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad n < y_n < 2n.}$$

15. Déterminons un équivalent simple de y_n quand $n \to +\infty$. On a par définition,

$$n = f(y_n) = y_n - \ln(y_n).$$

Or on a vu que $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Or $\ln(u) \underset{u\to+\infty}{\ll} u$ donc

$$\ln(y_n) \underset{u\to+\infty}{\ll} y_n.$$

D'où

$$n = y_n - \ln(y_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n.}$$

16. Montrons que $y_n \underset{n\to+\infty}{=} n+\ln(n)+\frac{\ln(n)}{n}+o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$. Par la question précédente, on a $y_n \underset{n\to+\infty}{=} n+o(n)$. Or

$$n = y_n - \ln(y_n) \qquad \Leftrightarrow \qquad y_n = n + \ln(y_n).$$

Donc

$$\begin{aligned} y_n &\underset{n\to+\infty}{=} n + \ln(n + o(n)) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} n + \ln(n) + \ln(1 + o(1)) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} n + \ln(n) + o(1). \end{aligned}$$

Puis on réinjecte dans l'expression du début,

$$\begin{aligned} y_n = n + \ln(y_n) &\underset{n\to+\infty}{=} n + \ln(n + \ln(n) + o(1)) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} n + \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Posons $u \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors,

- $u \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
- de plus,

$$o(u) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Or $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u + o(u)$. D'où,

$$y_n \underset{n\to+\infty}{=} n + \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{y_n \underset{n\to+\infty}{=} n + \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).}$$

Partie 4 : Une suite récurrente

On fixe $u_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_{n+1} = f(u_n)$.

17. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in [1;2]$. Procédons par récurrence. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « u_n existe et $u_n \in [1;2]$ »

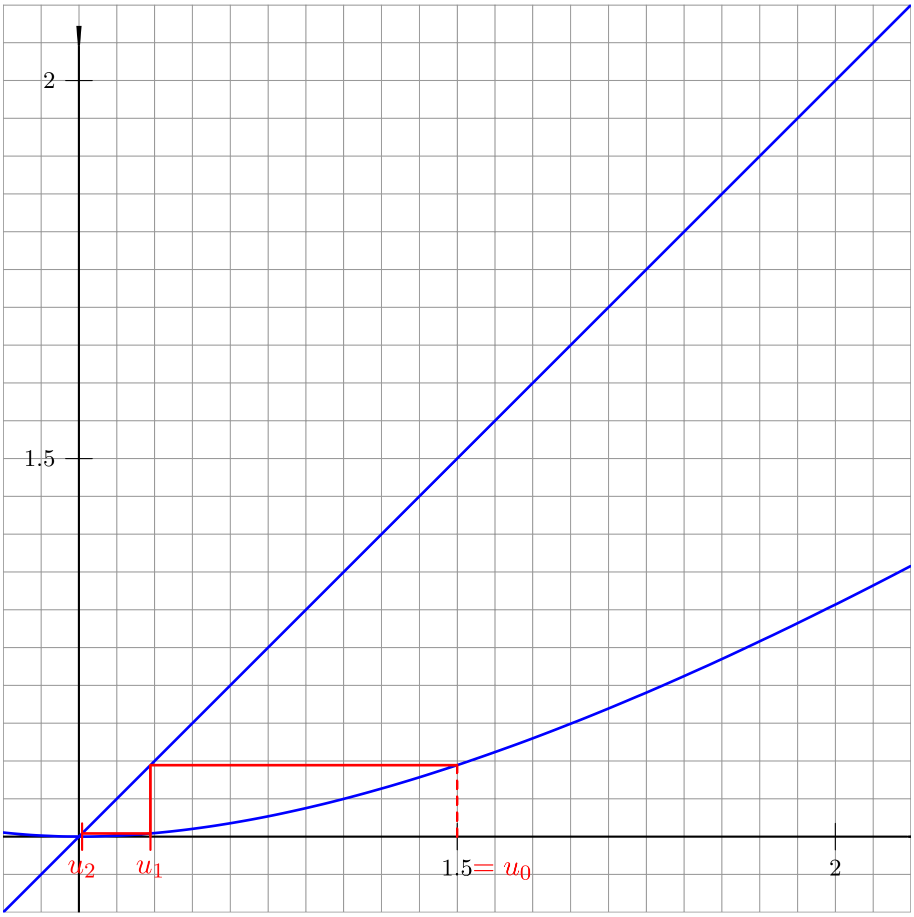
    Initialisation. Si $n = 0$, alors $u_0 = \frac{3}{2}$ donc u_0 existe et $u_0 \in [1;2]$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

    Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, u_n existe et $u_n \in [1;2]$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$. Puisque u_n existe, $u_n \in [1;2]$ et que f est définie sur $[1;2]$, alors $u_{n+1} = f(u_n)$ existe. De plus, par la question 2. $f([1;2]) \subset [1;2]$. Comme $u_n \in [1;2]$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in f([1;2]) \subset [1;2]$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

    Conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [1;2].}$$

18. La convergence étant très rapide, il n'est pas facile de visualiser beaucoup de termes. Voici au moins pour les deux premiers :



19. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln(u_n) \qquad \Leftrightarrow \qquad u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n).$$

    Or $u_n \geqslant 1$, donc $\ln(u_n) \geqslant 0$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant u_n.$$

    Conclusion,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

20. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. Par les questions précédentes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1. Donc par le théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons a sa limite. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$, on en déduit que $1 \leqslant a \leqslant 2$. De plus,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$
Donc par passage à la limite, la continuité de f sur $[1;2]$ et donc en a et la caractérisation séquentielle de la continuité,
$$a = f(a) \quad\Leftrightarrow\quad a = a - \ln(a) \quad\Leftrightarrow\quad \ln(a) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad a = 1.$$
Conclusion,
$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 1.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$.

21. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \geqslant 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $u_k \in [1;2]$ donc $u_k \geqslant 1 > 0$. Donc par produit,
$$p_n = \prod_{k=0}^{n} u_k \geqslant 1.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n \geqslant 1.}$$

22. Montrons que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a vu à la question précédente que $p_n \geqslant 1$ donc $p_n \neq 0$. Donc
$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\prod_{k=0}^{n+1} u_k}{\prod_{k=0}^{n} u_k} = u_{n+1}$$
Or $u_{n+1} \in [1;2]$ donc $\frac{p_{n+1}}{p_n} \geqslant 1$. Or $p_n \geqslant 1 > 0$ donc
$$p_{n+1} \geqslant p_n.$$
Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en conclut que
$$\boxed{\text{la suite } (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

23. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \ln\left(u_k\right) = u_0 - u_{n+1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$u_{k+1} = f\left(u_k\right) = u_k - \ln\left(u_k\right) \quad\Leftrightarrow\quad u_{k+1} - u_k = -\ln\left(u_k\right) \quad\Leftrightarrow\quad \ln\left(u_k\right) = u_k - u_{k+1}.$$
Donc en sommant,
$$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(u_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(u_k - u_{k+1}\right).$$
On reconnait une somme télescopique, donc
$$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(u_k\right) = u_0 - u_{n+1}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \ln\left(u_k\right) = u_0 - u_{n+1}.}$$

24. Montrons que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et précisons sa limite. Par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_0 - u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \ln(u_k) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n} u_k\right) = \ln(p_n).$$

Donc

$$p_n = \mathrm{e}^{u_0 - u_{n+1}}.$$

Or par la question 20. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 1$ donc par continuité de la fonction exponentielle, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}-1} = \mathrm{e}^{1/2} = \sqrt{\mathrm{e}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la suite } (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \sqrt{\mathrm{e}}.}$$

25. Montrons que que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(u_n - 1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que $u_n \in [1;2]$. Or par la question 3.

$$\forall (x,y) \in [1;2]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|.$$

Par conséquent, en prenant $x = u_n$ et $y = 1$, on a

$$|f(u_n) - f(1)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 1|$$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(1) = 1$, donc

$$|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 1|.$$

Enfin, on sait que $u_n \geqslant 1$ et $u_{n+1} \geqslant 1$ donc $|u_{n+1} - 1| = u_{n+1} - 1$ et $|u_n - 1| = u_n - 1$. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(u_n - 1).}$$

26. Montrons que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Par la question précédente, la suite $(u_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est « sous-géométrique ». On montre alors par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n - 1 \leqslant \frac{1}{2^n}(u_0 - 1) = \frac{1}{2^n}\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \frac{u_n - 1}{1/2^n} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Donc la suite $\left(\frac{u_n - 1}{1/2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. D'où

$$u_n - 1 \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^n}\right).}$$

Exercice II - Polynômes

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Précisons P_0, P_1, P_2 et P_3. On a

$$P_0 = \sum_{k=0}^{0} \frac{X^k}{k!} = \frac{X^0}{0!} = 1.$$

Puis,

$$P_1 = \sum_{k=0}^{1} \frac{X^k}{k!} = 1 + X,$$

et encore,

$$P_2 = 1 + X + \frac{X^2}{2}, \qquad P_3 = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6}.$$

Conclusion,

$$\boxed{P_0 = 1, \quad P_1 = 1 + X, \quad P_2 = 1 + X + \frac{X^2}{2}, \quad P_3 = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6}.}$$

2. Déterminons les deux racines complexes de P_2 et déduisons-en la factorisation de P_2 dans $\mathbb{C}[X]$. On a $P_2 = 1 + X + \frac{X^2}{2}$. Le discriminant associé vaut

$$\Delta = 1 - 4\frac{1}{2} = -1,$$

dont le deux racines carrées sont i et $-i$. Ainsi, les racines de P_2 sont

$$z_1 = \frac{-1+i}{2\frac{1}{2}} = -1 + i \quad \text{et} \quad z_2 = -1 - i.$$

On a alors $P_2 = a\,(X - z_1)\,(X - z_2)$ avec a le coefficient dominant de P_2. Conclusion,

$$\boxed{\text{les deux racines de } P_2 \text{ sont } z_1 = -1 + i \text{ et } z_2 = -1 - i \text{ et on a } P_2 = \frac{1}{2}\,(X + 1 - i)\,(X + 1 + i).}$$

3. Par la question précédente,

$$\boxed{\text{le polynôme } P_2 \text{ est scindé et non irréductible dans } \mathbb{C}[X].}$$

Au contraire, puisque $\Delta < 0$,

$$\boxed{\text{le polynôme } P_2 \text{ n'est pas scindé mais irréductible dans } \mathbb{R}[X].}$$

4. Calculons P_3'. On a $P_3 = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6}$. Donc

$$\boxed{P_3' = 1 + X + \frac{X^2}{2} = P_2.}$$

5. Montrons que P_3 n'admet pas de racine multiple. Procédons par l'absurde. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de multiplicité au moins 2 de P_3. Alors,

$$P_3(\alpha) = P_3'(\alpha) = 0.$$

Donc

$$\begin{cases} 1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{6}=0 \\ 1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha^3}{6}=0 \\ 1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2}=0 \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ 1=0 \text{ impossible!} \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{P_3 \text{ n'admet pas de racine multiple.}}$$

6. On a,

$$P_n' = \sum_{k=1}^{n} k\frac{X^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!}.$$

En effectuant le glissement d'indice $\tilde{k} = k-1$,

$$P_n' = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!} = P_{n-1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{P_n' = P_n.}$$

7. Par la question précédente,

$$P_n' = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} - \frac{X^n}{n!} = P_n - \frac{X^n}{n!}.$$

Conclusion,

$$\boxed{P_n' = P_n - \frac{X^n}{n!}.}$$

8. Montrons que P_n ne possède que des racines simples et procédons par l'absurde. Supposons que P_n possède une racine de multiplicité au moins 2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une telle racine. Alors on sait que $P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = 0$. D'après la question précédente, on obtient que $0 = 0 - \frac{\alpha^n}{n!}$ et donc $\alpha = 0$, car $n \neq 0$. Or 0 n'est pas racine de P_n car $P_n(0) = 1 + 0 = 1 \neq 0$. On obtient donc une contradiction. Conclusion,

$$\boxed{\text{le polynôme } P_n \text{ ne possède que des racines simples.}}$$

Exercice III - Polynômes

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit (E_n) l'équation suivante d'inconnue un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P(X+2) - P(X) = X^n \qquad \text{et} \qquad P(0) = 0 \qquad\qquad (E_n)$$

On pose également (E) l'équation suivante d'inconnue un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P(X+2) - P(X) = 0 \qquad\qquad (E)$$

1. • Si $P = 1$, alors $P(X+2) - P(X) = 1 - 1 = 0$ donc $\boxed{P = 1 \text{ est une solution de } (E).}$

- Si $P=\frac{X}{2}$, alors $P(X+2)-P(X)=\frac{X+2}{2}-\frac{X}{2}=1=X^0$. De plus $P(0)=\frac{0}{2}=0$ et donc $\boxed{P=\frac{X}{2} \text{ est une solution de } (E_0).}$
- Si $P=\frac{X^2}{2}$, alors $P(X+2)-P(X)=\frac{(X+2)^2}{2}-\frac{X^2}{2}=\frac{2X+4}{2}=X+2$. Donc $\boxed{P=\frac{X^2}{2} \text{ n'est solution d'aucune équation pré-citée.}}$

2. (a) Soit P une solution de (E) telle que $\deg(P)\geqslant 1$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, on sait que P admet une racine complexe. Donc $\boxed{\exists\alpha\in\mathbb{C},\ P(\alpha)=0}$.

   (b) Posons pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$ la propriété « $\alpha+2k$ est une racine de P ».

   - *Initialisation.* Si $k=0$ alors $\alpha+2\times 0=\alpha$ est une racine de P d'après la question précédente. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - *Hérédité.* Soit $k\in\mathbb{N}$ et supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Alors $P(\alpha+2k)=0$. Or P est une solution de (E) donc en évaluant cette équation en $\alpha+2k$, on a
   $$P(\alpha+2k+2)-\underbrace{P(\alpha+2k)}_{=0}=0 \qquad\Leftrightarrow\qquad P(\alpha+2(k+1))=0,$$
   car $\alpha+2k$ est une racine de P. Donc $\alpha+2(k+1)$ est aussi une racine de P et donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
   - *Conclusion.* Par récurrence, on en déduit que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie i.e. $\boxed{\text{pour tout } k\in\mathbb{N},\ \alpha+2k \text{ est une racine de } P.}$

   (c) D'après les questions précédentes, on a montré que si P est une solution de (E) telle que $\deg(P)\geqslant 1$ alors P admet une infinité de racines distinctes. On en déduit que dans ce cas P est nécessairement le polynôme nul ce qui contredit le fait que $\deg(P)\geqslant 1$. Dès lors les seules solutions possibles de (E) sont les polynômes constants. Soit $P=C$ un polynôme constant, $C\in\mathbb{R}$. Alors $P(X+2)-P(X)=C-C=0$ et donc tous les polynômes constants sont solutions de (E).
   $\boxed{\text{Conclusion : l'ensemble des solutions de } (E) \text{ est } \mathbb{R}_0[X].}$

3. Soit $n\in\mathbb{N}$. Soient P et Q deux solutions de (E_n). Alors,
$$\begin{cases} P(X+2)-P(X)=X^n, & P(0)=0\\ Q(X+2)-Q(X)=X^n, & Q(0)=0\end{cases}$$
On pose $R=P-Q$, par soustraction des deux égalités ci-dessus,
$$R(X+2)-R(X)=0.$$
Autrement dit R est une solution de (E). Donc d'après la question précédente, il existe $C\in\mathbb{R}$ telle que $R=P-Q=C$. En évaluant en 0, on obtient $R(0)=0-0=C$ et donc $C=0$ et $P=Q$ ce qui démontre que $\boxed{(E_n) \text{ admet au plus une solution}}$.

4. Soit P une solution de (E_n).

   (a) Par dérivation d'une composée, en posant $Q=P(X+2)$, on a $Q'=1\times P'(X+2)=P'(X+2)$ et de même pour tout $k\in\mathbb{N}$, $Q^{(k)}=P^{(k)}(X+2)$ en particulier $Q^{(n+1)}=P^{(n+1)}(X+2)$. De même la dérivée $n+1$-ième de $P(X)=P$ est bien $P^{(n+1)}(X)$. Donc en dérivant $n+1$ fois l'égalité $P(X+2)-P(X)=X^n$, on obtient que
   $$P^{(n+1)}(X+2)-P^{(n+1)}(X)=0.$$
   Ainsi $\boxed{P^{(n+1)} \text{ est une solution de } (E).}$

(b) D'après la question précédente et la question 2, on sait que $P^{(n+1)}$ est un polynôme constant et donc nécessairement $\boxed{\deg(P) \leqslant n+1}$.

5. D'après la question précédente, on sait que si P est une solution de (E_1) alors $\deg(P) \leqslant 2$. Soient $(a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^3$ et $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& P \text{ est solution de } (E_1) \\
\Leftrightarrow\quad & \begin{cases} a_0 + a_1(X+2) + a_2(X+2)^2 - \left(a_0 + a_1 X + a_2 X^2\right) = X \\ \text{et} \quad a_0 + a_1 \times 0 + a_2 \times 0^2 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\quad & a_0 = 0 \quad \text{et} \quad a_1 X + 2a_1 + a_2 X^2 + 4a_2 X + 4a_2 - a_1 X - a_2 X^2 = X \\
\Leftrightarrow\quad & a_0 = 0 \quad \text{et} \quad 4a_2 X + 2a_1 + 4a_2 = X.
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme,

$$\begin{aligned}
P \text{ est solution de } (E_1) \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ 4a_2 = 1 \\ 2a_1 + 4a_2 = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_2 = \frac{1}{4} \\ a_1 = -2a_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad P = \frac{X^2 - 2X}{4}.
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\text{l'unique solution de } (E_1) \text{ est } P = \frac{X^2-2X}{4}}$.

Problème IV - Espaces vectoriels

Partie 1 : Espaces de polynômes

On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = P(-1) = 0_{\mathbb{R}} \}$.

1. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. On a

- $F \subset \mathbb{R}[X]$ par définition de F.
- Si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Alors, $P(1) = P(-1) = 0_{\mathbb{R}}$. Donc $0_{\mathbb{R}[X]} \in F$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in F^2$. Posons $R = \lambda P + \mu Q$. Puisque $P \in F$, $P(1) = P(-1) = 0$ et puisque $Q \in F$, $Q(-1) = Q(1) = 0$. Par suite,

$$R(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad R(-1) = \lambda P(-1) + \mu Q(-1) = 0.$$

Donc $R \in F$ et F est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion,

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X].}$$

2. Montrons que $F \cap \mathbb{R}_1[X] = \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}$. Soit $P \in F \cap \mathbb{R}_1[X]$, alors $P \in F$ et donc $P(1) = P(-1) = 0_{\mathbb{R}}$. Autrement dit 1 et -1 sont des racines de P. Or $P \in \mathbb{R}_1[X]$, donc $\deg(P) \leqslant 1$ et P possède deux racines distinctes, $2 > \deg(P)$. On en déduit que P est le polynôme nul, $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. D'où $F \cap \mathbb{R}_1[X] \subset \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}$. De plus $\left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\} \subset F \cap \mathbb{R}_1[X]$. Conclusion, $F \cap \mathbb{R}_1[X] = \left\{0_{\mathbb{R}[X]}\right\}$ et

$$\boxed{\text{Les espaces } F \text{ et } \mathbb{R}_1[X] \text{ sont en somme directe.}}$$

3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Soit R le reste et Q le quotient de la division euclidienne de P par $(X-1)(X+1)$. Puisque $\deg(R) < \deg((X-1)(X+1)) = 2$, on en déduit que $\deg(R) \leqslant 1$. Donc il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R = aX+b$. Puis, comme $P = (X-1)(X+1)Q + R = (X-1)(X+1)Q + aX + b$, on obtient en évaluant en 1 et -1 que

$$\begin{aligned}
\begin{cases} P(1) = 0 + a + b \\ P(-1) = 0 - a + b \end{cases} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + b = P(1) \\ 2b = P(1) + P(-1) \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = P(1) - b = P(1) - \frac{P(1)+P(-1)}{2} = \frac{P(1)-P(-1)}{2} \\ b = \frac{P(1)+P(-1)}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion, le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X+1)$ est donné par

$$\boxed{R = \frac{P(1) - P(-1)}{2} X + \frac{P(1) + P(-1)}{2}.}$$

4. On a déjà vu à la question 2. que les espaces F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont en somme directe. Montrons également que $F + \mathbb{R}_1[X] = \mathbb{R}[X]$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Par le théorème de la division euclidienne et comme dans la question précédente, il existe un *unique mais l'unicité est inutile ici puisque le caractère direct a déjà été établi)* couple $(Q,R) \in \mathbb{R}_1[X] \times \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P = (X-1)(X+1)Q + R.$$

Posons $S = (X-1)(X+1)Q$. Alors, on a

- $P = S + R$,
- $R \in \mathbb{R}_1[X]$ (déjà mentionné car $\deg(R) < 2$).
- Montrons que $S \in F$. On a directement, $S(1) = 0$ et $S(-1) = 0$. Donc $S \in F$.

Donc $P = S + R \in F + \mathbb{R}_1[X]$. Ainsi, $\mathbb{R}[X] \subset F + \mathbb{R}_1[X]$. Or on a aussi $F + \mathbb{R}_1[X] \subset \mathbb{R}[X]$, donc $\mathbb{R}[X] = F + \mathbb{R}_1[X]$. Rappelons que l'on sait déjà que F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont en somme directe. Conclusion,

$$\boxed{\text{Les espaces } F \text{ et } \mathbb{R}_1[X] \text{ sont supplémentaires.}}$$

Partie 2 : Espaces d'un endomorphisme

On suppose maintenant que $E = \mathbb{R}_4[X]$ et on considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & \left(X^2 - X\right) P(1) + \left(X^2 + X\right) P(-1). \end{array}$$

On appelle noyau de f l'ensemble

$$\operatorname{Ker}(f) = \left\{ P \in E \;\middle|\; f(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \right\}.$$

On appelle image de f l'ensemble

$$\operatorname{Im}(f) = f(E) = \{ Q \in \mathbb{R}[X] \mid \exists P \in E,\ f(P) = Q \}.$$

5. (a) Soit $P \in E$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
P \in \operatorname{Ker}(f) \quad & \Leftrightarrow \quad f(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\
& \Leftrightarrow \quad \left(X^2 - X\right) P(1) + \left(X^2 + X\right) P(-1) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\
& \Leftrightarrow \quad (P(1) + P(-1)) X^2 + (P(-1) - P(1)) X = 0_{\mathbb{R}[X]}.
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient que

$$\begin{aligned}
P \in \operatorname{Ker}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(1) + P(-1) = 0_{\mathbb{R}} \\ P(-1) - P(1) = 0_{\mathbb{R}} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(1) + P(-1) = 0_{\mathbb{R}} \\ 2P(-1) = 0_{\mathbb{R}} \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
&\Leftrightarrow \quad P(1) = P(-1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad P \in F.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f) = F.}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
F &= \{ P \in \mathbb{R}_4[X] \mid 1 \text{ et } -1 \text{ sont deux racines disctinctes de } P \} \\
&= \{ P \in \mathbb{R}_4[X] \mid (X-1)(X+1) \text{ divise } P \} \\
&= \{ P \in \mathbb{R}_4[X] \mid \exists Q \in \mathbb{R}_2[X],\ P = (X-1)(X+1)Q \} \\
&= \left\{ P \in \mathbb{R}_4[X] \,\middle|\, \exists (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^{n-1},\ P = (X-1)(X+1)\left(a_0 + a_1 X + a_2 X^2\right) \right\} \\
&= \left\{ (X-1)(X+1)\left(a_0 + a_1 X + a_2 X^2\right) \in \mathbb{R}_4[X] \,\middle|\, (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \left\{ a_0 (X-1)(X+1) + a_1 (X-1)(X+1) X + a_2 (X-1)(X+1) X^2 \,\middle|\, (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \right\}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$F = \operatorname{Vect}\left((X-1)(X+1), (X-1)(X+1)X, (X-1)(X+1)X^2\right).$$

Posons $\mathscr{B}_F = \left((X-1)(X+1), (X-1)(X+1)X, (X-1)(X+1)X^2\right)$ alors par ce qui précède, $\mathscr{B}_F$ est génératrice dans $\mathscr{B}_F$. De plus on a trois polynômes de degré respectivement 2, 3 et 4. Donc la famille des polynômes de $\mathscr{B}_F$ est de degrés distincts. Donc $\mathscr{B}_F$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_F \text{ est une base de } F = \operatorname{Ker}(f).}$$

6. (a) On observe les points suivants.
   - Soit $Q \in \operatorname{Im}(f)$, donc il existe $P \in E$ tel que
     $$Q = f(P) = \left(X^2 - X\right) P(1) + \left(X^2 + X\right) P(-1) \in \mathbb{R}_2[X].$$
     Donc $\operatorname{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[X]$.
   - Si $Q = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. Alors on a $f\left(0_{\mathbb{R}[X]}\right) = \left(X^2 - X\right) \times 0_{\mathbb{R}} + \left(X^2 + X\right) \times 0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$. Donc Q admet un antécédent par f et donc $Q = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \in \operatorname{Im}(f)$.
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(Q_1, Q_2) \in \operatorname{Im}(f)$, alors il existe $P_1 \in \mathbb{R}[X]$ et $P_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que $Q_1 = \left(X^2 - X\right) P_1(1) + \left(X^2 + X\right) P_1(-1)$ et $Q_2 = f(Q_1) = \left(X^2 - X\right) Q_2(1) + \left(X^2 + X\right) Q_2(-1)$. Posons $R = \lambda Q_1 + \mu Q_2$ et $S = \lambda P_1 + \mu P_2$. Alors, on observe que
     $$\begin{aligned}
     f(S) &= \left(X^2 - X\right) S(1) + \left(X^2 + X\right) S(-1) \\
     &= \left(X^2 - X\right)(\lambda P_1(1) + \mu P_2(1)) + \left(X^2 + X\right)(\lambda P_1(-1) + \mu P_2(-1)) \\
     &= \lambda \left[\left(X^2 - X\right) P_1(1) + \left(X^2 + X\right) P_1(-1)\right] + \mu \left[\left(X^2 - X\right) P_2(1) + \left(X^2 + X\right) P_2(-1)\right] \\
     &= \lambda f(P_1) + \mu f(P_1) \\
     &= \lambda Q_1 + \mu Q_2 \\
     &= R.
     \end{aligned}$$
     Donc R admet un antécédent par f donc $R \in \operatorname{Im}(f)$. Ainsi, $\operatorname{Im}(f)$ est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(f) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_2[X] \text{ et donc est un espace vectoriel.}}$$

(b) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Procédons par double implication. Supposons $Q \in \mathrm{Im}\,(f)$. Alors, il existe $P \in \mathbb{R}_4[X]$ tel que $Q = \left(X^2 - X\right) P(1) + \left(X^2 + X\right) P(-1)$. Posons $a = P(1)$ et $b = P(-1)$. Alors on a bien

$$Q = a\left(X^2 - X\right) + b\left(X^2 + X\right).$$

Réciproquement, supposons qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Q = a\left(X^2 - X\right) + b\left(X^2 + X\right)$. Alors, posons $P = \frac{a-b}{2} X + \frac{a+b}{2}$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} f(P) &= \left(X^2 - X\right) P(1) + \left(X^2 + X\right) P(-1) \\ &= \left(X^2 - X\right)\left(\frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2}\right) + \left(X^2 + X\right)\left(-\frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2}\right) \\ &= a\left(X^2 - X\right) + b\left(X^2 + X\right) \\ &= Q \end{aligned}$$

Donc Q admet un antécédent par f et donc $Q \in \mathrm{Im}\,(f)$. Conclusion,

$$\boxed{Q \in \mathrm{Im}\,(f) \quad \Leftrightarrow \quad \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ Q = a\left(X^2 - X\right) + b\left(X^2 + X\right).}$$

(c) Par la question précédente, on en déduit que

$$\mathrm{Im}\,(f) = \left\{ a\left(X^2 - X\right) + b\left(X^2 + X\right) \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\left(X^2 - X, X^2 + X\right).$$

Posons $\mathscr{B}_I = \left(X^2 - X, X^2 + X\right)$, on vient donc de démontrer que $\mathscr{B}_I$ est génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$. De plus les deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc $\mathscr{B}_I$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B}_I \text{ est une base de } \mathrm{Im}\,(f).}$$

7. Soit $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_I, \mathscr{B}_F)$. Par les questions précédentes, on sait que $\mathscr{B}_I$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\mathscr{B}_F$ est une base de $F = \mathrm{Ker}\,(f)$. Montrons que $\mathscr{B}$ est une base de E. Commençons à observer que

$$\begin{aligned} \mathscr{B}_F &= \left((X-1)(X+1), (X-1)(X+1)X, (X-1)(X+1)X^2\right) \\ &= \left(X^2 - 1, X^3 - X, X^4 - X^2\right). \end{aligned}$$

Alors,

$$\mathscr{B} = \left(X^2 - X, X^2 + X, X^2 - 1, X^3 - X, X^4 - X^2\right).$$

Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré, par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}) &= \mathrm{Vect}\left(-X + 1, X + 1, X^2 - 1, X^3 - X, X^4 - X^2\right) && \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_3 \\ C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \end{array} \\ &= \mathrm{Vect}\left(2, X + 1, X^2 - 1, X^3 - X, X^4 - X^2\right) && C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \\ &= \mathrm{Vect}\left(1, X + 1, X^2 - 1, X^3 - X, X^4 - X^2\right) && C_1 \leftarrow \tfrac{1}{2} C_1 \\ &= \mathrm{Vect}\left(1, X, X^2 - 1, X^3 - X, X^4 - X^2\right) && C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ &= \mathrm{Vect}\left(1, X, X^2, X^3 - X, X^4 - X^2\right) && C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \\ &= \mathrm{Vect}\left(1, X, X^2, X^3, X^4 - X^2\right) && C_4 \leftarrow C_4 + C_2 \\ &= \mathrm{Vect}\left(1, X, X^2, X^3, X^4\right) && C_5 \leftarrow C_5 + C_3 \end{aligned}$$

Onr reconnait la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$ donc

$$\mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}) = \mathbb{R}_4[X],$$

Donc $\mathscr{B}$ est génératrice de E. Montrons que $\mathscr{B}$ est libre. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_4) \in \mathbb{R}^5$ tel que

$$\lambda_0 \left(X^2 - X\right) + \lambda_1 \left(X^2 + X\right) + \lambda_2 \left(X^2 - 1\right) + \lambda_3 \left(X^3 - X\right) + \lambda_4 \left(X^4 - X^3\right) = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Alors,

$$\lambda_0 (X-1) X + \lambda_1 (X+1) X + \lambda_2 (X-1)(X+1) + \lambda_3 (X-1)(X+1) X + \lambda_4 (X-1)(X+1) X^2 = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

On peut évidemment tout développer et utiliser l'unicité des coefficients d'un polynôme puis résoudre le système. Soyons plus astucieux et procédons par évaluation. Commençons par évaluer en 0,

$$-\lambda_2 = 0.$$

Dès lors,

$$\begin{array}{ll} & \lambda_0 (X-1) X + \lambda_1 (X+1) X + \lambda_3 (X-1)(X+1) X + \lambda_4 (X-1)(X+1) X^2 = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ \Leftrightarrow & X \left(\lambda_0 (X-1) + \lambda_1 (X+1) + \lambda_3 (X-1)(X+1) + \lambda_4 (X-1)(X+1) X\right) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ \Leftrightarrow & \lambda_0 (X-1) + \lambda_1 (X+1) + \lambda_3 (X-1)(X+1) + \lambda_4 (X-1)(X+1) X = 0_{\mathbb{R}[X]} \end{array}$$

En évaluant en $X = 1$,

$$2\,\lambda_1 = 0.$$

Donc

$$\begin{array}{ll} & \lambda_0 (X-1) + \lambda_3 (X-1)(X+1) + \lambda_4 (X-1)(X+1) X = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ \Leftrightarrow & (X-1)\left(\lambda_0 + \lambda_3 (X+1) + \lambda_4 (X+1) X\right) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ \Leftrightarrow & \lambda_0 + \lambda_3 (X+1) + \lambda_4 (X+1) X = 0_{\mathbb{R}[X]}. \end{array}$$

On évalue en -1, on obtient que $\lambda_0 = 0$ donc $\lambda_3 (X+1) + \lambda_4 (X+1) X = 0_{\mathbb{R}[X]}$ puis

$$\lambda_3 + \lambda_4 X = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient que $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Ainsi, $\mathscr{B}$ est libre. Or on a vu que $\mathscr{B}$ est aussi génératrice de E donc $\mathscr{B}$ est une base de E. Rappelons que $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_I, \mathscr{B}_F)$ et que $\mathscr{B}_I$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$ et $\mathscr{B}_F$ est une base de $F = \operatorname{Ker}(f)$. Donc par le théorème de la base adaptée, on en conclut que

$$\boxed{\text{Les espaces } \operatorname{Ker}(f) \text{ et } \operatorname{Im}(f) \text{ sont supplémentaires dans } E.}$$

8. On note que $X^2 - X$ est un vecteur de $\mathscr{B}_I$ et donc $X^2 - X \in \operatorname{Im}(f)$. Or $X^2 - X \notin \mathbb{R}_1[X]$. Donc

$$\boxed{\operatorname{Im}(f) \neq \mathbb{R}_1[X]}.$$

Nous avons donc construit dans ce problème deux espaces supplémentaires différents de $F = Ker(f)$.

Partie 3 : Espaces de fonctions

On fixe $I =]-1; +\infty[$ et $E = \mathscr{C}^2(I, \mathbb{R})$. On considère alors

$$\begin{aligned} F &= \left\{ f \in E \;\middle|\; \forall t \in I,\ (t+1) f''(t) + (t-1) f'(t) - 2f(t) = 0 \right\} \\ G &= \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \;\middle|\; (X+1) P'' + (X-1) P' - 2P = 0 \right\} \\ H &= \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\, \mathrm{e}^{\alpha x} \end{array} \;\middle|\; (\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2 \right\}. \end{aligned}$$

9. Et hop ! On déroule.

- On a $F \subset E$ par définition.
- Si $f = 0_E$, alors pour tout $t \in I$, $f(t) = f'(t) = f''(t) = 0$. Et donc pour tout $t \in I$, $(t+1)\,f''(t) + (t-1)\,f'(t) - 2f(t) = 0_{\mathbb{R}}$. Donc $f = 0_E \in F$.
- Soient $(\lambda, \mu) \in E^2$ et $(f_1, f_2) \in F$. Posons $g = \lambda f_1 + \mu f_2$. Alors, puisque E est un espace vectoriel, $g \in E$ et donc g est deux fois dérivable sur I. De plus, en notant $h(t) = (t+1)\,g''(t) + (t-1)\,g'(t) - 2g(t)$ pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} h(t) &= (t+1)\,(\lambda f_1 + \mu f_2)''\,(t) + (t-1)\,(\lambda f_1 + \mu f_2)'\,(t) - 2\,(\lambda f_1 + \mu f_2)\,(t) \\ &= \lambda\,(t+1)\,f_1''(t) + \mu\,(t+1)\,f_2''(t) + \lambda\,(t-1)\,f_1'(t) + \mu\,(t-1)\,f_2'(t) - 2\,\lambda\,f_1(t) + 2\mu f_2(t) \\ &= \lambda\,\underbrace{\left[(t+1)\,f_1''(t) + (t-1)\,f_1'(t) - 2f_1(t)\right]}_{=0_{\mathbb{R}} \text{ car } f_1 \in F} + \mu\,\underbrace{\left[(t+1)\,f_2''(t) + (t-1)\,f_2'(t) - 2f_2(t)\right]}_{=0_{\mathbb{R}} \text{ car } f_2 \in F} \\ &= \lambda\,0 + \mu 0 = 0. \end{aligned}$$

  Donc $g \in F$ et F est stable par combinaisons linéaires.

Conclusion,

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.}$$

10. Montrons que H n'est pas stable par combinaisons linéaires. Plus précisément, posons $f_1 : t \mapsto \mathrm{e}^t$ et $f_2 : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$. Alors,

- $f_1 \in H$.
- $f_2 \in H$.
- Considérons $\mathrm{ch} = \frac{f_1+f_2}{2} = \mathrm{ch}$. Montrons que $\mathrm{ch} \notin H$. Procédons par l'absurde. Supposons que $\mathrm{ch} \in H$. Alors, il existe $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall t \in I, \qquad \mathrm{ch}(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{\alpha t}.$$

  En particulier, pour $t = 0$, $1 = \mathrm{ch}(0) = \lambda$. Donc pour tout $t \in I$, $\mathrm{ch}(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}$. En dérivant cette égalité (les deux fonctions sont dérivables sur I) on obtient que

$$\forall t \in I, \qquad \mathrm{sh}(t) = \alpha\,\mathrm{e}^{\alpha t}.$$

  En particulier, en $t = 0$, $0 = \mathrm{sh}(0) = \alpha$. Donc pour tout $t \in I$, $\mathrm{ch}(t) = 1 \times \mathrm{e}^0 = 1$. Ce qui est absurde (la fonction ch diverge vers $+\infty$ en $+\infty$ par exemple). Donc $\frac{f_1+f_2}{2} \notin H$.

Conclusion, H n'est pas stable par combinaisons linéaires. Conclusion,

$$\boxed{H \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } E.}$$

11. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et notons $n = \deg(P)$. Supposons $n \geqslant 2$ et notons a_n le coefficient dominant de P. Alors $a_n \neq 0$. Par suite, le terme dominant de P'' est $n\,(n-1)\,a_n X^{n-2}$ et donc celui de $(X+1)\,P''$ est $n\,(n-1)\,a_n X^{n-1}$. De même le terme dominant de P' est $na_n X^{n-1}$ et donc celui de $(X-1)\,P'$ est $na_n X^n$. Enfin le terme dominant de $-2P$ est $-2a_n X^n$. Ainsi, le terme dominant de $(X+1)\,P'' + (X-1)\,P' - 2P$ est $na_n X^n - 2a_n X^n$. Dès lors, si $P \in G$, alors

$$na_n - 2a_n = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad n = 2.$$

Donc dans tous les cas, on obtient que $n \leqslant 2$ et donc $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et donc $\exists\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = a + bX + cX^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P \in G \quad &\Leftrightarrow \quad (X+1)\,(2c) + (X-1)\,(b+2cX) - 2a - 2bX - 2cX^2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ &\Leftrightarrow \quad 2cX + 2c + bX + 2cX^2 - b - 2cX - 2a - 2bX - 2cX^2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ &\Leftrightarrow \quad (2c-2c)\,X^2 + (2c+b-2c-2b)\,X + (2c-b-2a) = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \\ &\Leftrightarrow \quad -bX + 2c - b - 2a = 0_{\mathbb{R}_2[X]}. \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient

$$P \in G \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -b = 0 \\ 2c - b - 2a = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = 0 \\ a = c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad P = a\left(1 + X^2\right).$$

Par conséquent,

$$G = \mathrm{Vect}\left(1 + X^2\right).$$

La famille $\left(1 + X^2\right)$ est libre car le polynôme est non nul et par ce qui précède elle engendre G. Conclusion

$$\boxed{\text{La famille } (1 + X) \text{ est une base de } G.}$$

12. On note que H est bien un sous-ensemble de E donc $F \cap H$ a un sens. Soit $f \in E$. On a

$$f \in F \cap H \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f \in F \\ f \in H \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f \in F \\ \exists\,(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in I, \qquad f(t) = \lambda\, \mathrm{e}^{\alpha t} \end{cases}.$$

Fixons $(\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ et f définie par $\forall t \in I,\ f(t) = \lambda\, \mathrm{e}^{\alpha t}$. Alors,

$$\begin{aligned} f \in F \quad & \Leftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad (t+1)\, f''(t) + (t-1)\, f'(t) - 2f(t) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad (t+1)\, \alpha^2\, \lambda\, \mathrm{e}^{\alpha t} + (t-1)\, \alpha\, \lambda\, \mathrm{e}^{\alpha t} - 2\, \lambda\, \mathrm{e}^{\alpha t} = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad \lambda\, \mathrm{e}^{\alpha t} \left[(t+1)\, \alpha^2 + (t-1)\, \alpha - 2\right] = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad \lambda \left[(t+1)\, \alpha^2 + (t-1)\, \alpha - 2\right] = 0 \qquad \text{car } \forall t \in I,\ \mathrm{e}^{\alpha t} \neq 0 \end{aligned}$$

On note que $\lambda = 0$ est une solution. Supposons $\lambda \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} f \in F \quad & \Leftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad (t+1)\, \alpha^2 + (t-1)\, \alpha - 2 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad \left(\alpha^2 + \alpha\right) t + \alpha^2 - \alpha - 2 = 0. \end{aligned}$$

Donc le polynôme $P = \left(\alpha^2 + \alpha\right) X + \alpha^2 - \alpha - 2$ s'annule une infinité de fois et donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient

$$\begin{aligned} f \in F \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha^2 + \alpha = 0 \\ \alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + 1 = 0 \\ \alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = -1 \\ 1 + 1 - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ 0 - 2 = 0 \text{ impossible} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -1 \\ & \Leftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad f(t) = \lambda\, \mathrm{e}^{-t}. \end{aligned}$$

On note que la dernière assertion est encore vraie si $\lambda = 0$. Finalement,

$$f \in F \cap H \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in I, \qquad f(t) = \lambda\, \mathrm{e}^{-t}.$$

Conclusion,

$$\boxed{F \cap H = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\, \mathrm{e}^{-t} \end{array} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{-t} \end{array} \right).}$$

On observe notamment que $\boxed{F \cap H \text{ est un espace vectoriel}}$.

13. Soit $f \in E$. On pose $g = f + f'$. Puisque f est deux fois dérivable sur I, f' et donc g sont dérivables sur I. De plus $g' = f'' + f'$ i.e. $f'' = g' - f'$. Ainsi,

$$\begin{aligned} f \in F \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad (t+1) f''(t) + (t-1) f'(t) - 2f(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad (t+1) \big(g'(t) - f'(t)\big) + (t-1) f'(t) - 2f(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad (t+1) g'(t) + (t-1-t-1) f'(t) - 2f(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad (t+1) g'(t) - 2f'(t) - 2f(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad (t+1) g'(t) - 2\big(f'(t) + f(t)\big) = 0. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f \in F \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad (t+1) g'(t) - 2g(t) = 0 \quad (E_g)\,.}$$

14. Avec les notations de la question précédente, pour tout $t \in I$, $t + 1 > 0$ donc

$$(E_g) \qquad \forall t \in I, \qquad g'(t) - \frac{2}{t+1} g(t) = 0.$$

On est donc en présence d'une équation différentielle d'ordre 1, homogène, résolue en g', à coefficient continu. Soit $a : t \mapsto -\frac{2}{t+1}$. La fonction a est continue sur I donc admet des primitives sur I dont l'une est donnée par $A : t \mapsto -2\ln(|t+1|) = -2\ln(t+1)$. Par conséquent,

$$g \text{ solution de } (E_g) \quad \Leftrightarrow \quad \exists C_1 \in \mathbb{R},\ \forall t \in I, \quad g(t) = C_1\,\mathrm{e}^{2\ln(t+1)} = C\,(t+1)^2\,.$$

Donc par la question précédente, on a

$$f \in F \quad \Leftrightarrow \quad \exists C_1 \in \mathbb{R},\ \forall t \in I, \quad f'(t) + f(t) = C_1\,(t+1)^2\,.$$

Fixons $C_1 \in \mathbb{R}$ et posons (E_f) l'équation

$$(E_f) \qquad \forall t \in I, \qquad f'(t) + f(t) = C_1\,(t+1)^2\,.$$

On est à nouveau face à une équation différentielle du premier ordre résolue en f' avec second membre continu à coefficients continus (car constants). Posons (EH_f) l'équation homogène associée. On a

$$(EH_f) \qquad \forall t \in I, \qquad f'(t) + f(t) = 0.$$

La fonction $a : t \mapsto 1$. La fonction a est continue sur I et y admet donc des primitives dont l'une est donnée par $A : t \mapsto t$. Ainsi l'ensemble des solutions de (EH_f) est donné par

$$\mathscr{S}_{EH_f} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & C_2\,\mathrm{e}^{-t} \end{array} \;\middle|\; C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cherchons maintenant une solution « particulière » de (E_f). Une méthode de variation de la constante est légitime et faisable (avec une double intégration par parties). Cependant puisque le second membre est ici polynômiale de degré 2, tentons de chercher une solution particulière polynômiale de degré 2. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $f : t \mapsto a + bt + ct^2$. Alors $f \in E$ et l'on a

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E_f) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad b + 2ct + a + bt + ct^2 = C_1\,(t+1)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad a + b + (b+2c)\,t + ct^2 = C_1 + 2C_1 t + C_1 t^2 \end{aligned}$$

La partie I étant infinie, on a par unicité des coefficients d'un polynôme,

$$f \text{ solution de } (E_f) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a + b = C_1 \\ b + 2c = 2C_1 \\ c = C_1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = C_1 - b = C_1 \\ b = 2C_1 - 2c = 2C_1 - 2C_1 = 0 \\ c = C_1 \end{cases}.$$

Donc $f : t \mapsto C_1\left(1+t^2\right)$ est une solution de (E_f). Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_f) est donné par

$$\mathscr{S}_{E_f} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & C_2\,\mathrm{e}^{-t} + C_1\left(1+t^2\right) \end{array} \middle| \, C_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Attention notez que dans ce sous-problème, C_1 est fixe mais C_2 est variable.

Finalement,

$$f \in F \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists C_1 \in \mathbb{R},\ \exists C_2 \in \mathbb{R},\ \forall t \in I, \qquad f(t) = C_2\,\mathrm{e}^{-t} + C_1\left(1+t^2\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{F = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & C_2\,\mathrm{e}^{-t} + C_1\left(1+t^2\right) \end{array} \middle| \, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

Et l'on retrouve d'une part les solutions qui sont dans G et d'autre part les solutions qui sont dans H, hyper classe non ?

15. Par la question précédente, on a

$$F = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{-t} \end{array}, \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 1+t^2 \end{array} \right).$$

Posons $f_1 : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{-t} \end{array}$, $f_2 : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 1+t^2 \end{array}$ et $\mathscr{B}_F = (f_1, f_2)$.On a donc $\mathscr{B}_F$ qui est une famille génératrice de F. Montrons que $\mathscr{B}_F$ est libre i.e. que les deux fonctions f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\lambda f_1 + \mu f_2 = 0_E \text{ i.e. } \forall t \in I, \qquad \lambda\,\mathrm{e}^{-t} + \mu\left(1+t^2\right) = 0.$$

Puisque I est un voisinage de 0, on peut écrire le développement limité suivant par exemple :

$$0 = \lambda\,\mathrm{e}^{-t} + \mu\left(1+t^2\right) \underset{t\to 0}{=} \lambda\left(1 - t + \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)\right) + \mu\left(1+t^2\right) \underset{t\to 0}{=} \lambda + \mu - \lambda\, t + \left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right) t^2 + o\left(t^2\right).$$

Par unicité du développement limité, on a

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -\lambda = 0 \\ \frac{\lambda}{2} + \mu = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \mu = 0 \\ \lambda = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = \mu = 0.$$

Donc $\mathscr{B}_F$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_F = \left(\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{-t} \end{array}, \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 1+t^2 \end{array} \right) \text{ est une base de } F.}$$

On pose $F' = \{ f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0 \}$. On admet que F' est un espace vectoriel.

16. Procédons par analyse-synthèse pour montrer que tout élément de E se décompose de façon unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de F'. Soit $f \in E$.

Analyse/Unicité. Soient $u \in F$ et $v \in F'$ tels que $f = u + v$. Puisque $u \in F = \mathrm{Vect}\left(\mathscr{B}_F\right)$, il existe (λ, μ) tel que

$$\forall t \in I, \qquad u(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t} + \mu\left(1+t^2\right).$$

Donc

$$\forall t \in I, \qquad f(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t} + \mu\left(1+t^2\right) + v(t).$$

De plus $v \in F'$ donc $v(0) = v'(0) = 0$. Ainsi,

$$\begin{cases} f(0) = \lambda + \mu \\ f'(0) = -\lambda\,\mathrm{e}^{-0} + 2\mu 0 + v'(0) = -\lambda \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mu = f(0) - \lambda = f(0) + f'(0) \\ \lambda = -f'(0) \end{cases}.$$

Comme f est fixée, λ et μ sont uniques, puis

$$\forall t \in I, \qquad u(t) = -f'(0)\,\mathrm{e}^{-t} + \big(f(0) + f'(0)\big)\left(1 + t^2\right).$$

Donc u est définie de façon unique et enfin $v = f - u$ également ce qui achève l'analyse.

Synthèse/existence. Posons pour tout $t \in I$, $u(t) = -f'(0)\,\mathrm{e}^{-t} + (f(0) + f'(0))\left(1 + t^2\right)$ et $v(t) = f(t) - u(t)$. Alors,

- $f = u + v$.
- $u \in \mathrm{Vect}\left(\mathscr{B}_F\right) = F$.
- Montrons que $v \in F'$. La fonction v est bien $\mathscr{C}^2$ sur I comme différence de fonctions qui le sont et

$$\begin{aligned} v(0) &= f(0) - u(0) = f(0) - \left(-f'(0) + \big(f(0) + f'(0)\big)\right) = 0 \\ v'(0) &= f'(0) - u'(0) = f'(0) - \left[+f'(0)\,\mathrm{e}^{-0} + \big(f(0) + f'(0)\big)\left(2 \times 0^2\right)\right] = 0. \end{aligned}$$

  Ainsi, on a bien $v \in F'$.

Donc $f = u + v \in F + F'$ ce qui démontre bien l'existence de la décomposition.

Conclusion,

$$\boxed{\text{Les espaces } F \text{ et } F' \text{ sont supplémentaires dans } E.}$$