Epreuve de mathématiques 7
2024-2025

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

lycée Raoul Follereau

Problème 1 - Espaces vectoriels et dimension

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On note $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de E dont tous les coefficients sont égaux à 1 et on considère les espaces

$$F = \{ A \in E \mid JA = AJ = 0_n \}$$
$$G = \left\{ A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in E \;\middle|\; \forall (i,j) \in [\![1; n-1]\!]^2,\ a_{i,j} = 0 \right\}$$
$$H = \{ A \in E \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ JA = AJ = \lambda J \}.$$

Sauf question explicite, on admet que tous les espaces définis sont des espaces vectoriels. Pour tout $(i,j) \in [\![1; n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient ligne i colonne j.

Partie 1 : Cas $n = 2$

On suppose dans toute cette partie que $n = 2$. On pose

$$F_1 = \{ A \in E \mid JA = 0_2 \}, F_2 = \{ A \in E \mid AJ = 0_2 \} \text{ et } F_3 = F_1 + F_2.$$

1. Montrer que F_1 un espace vectoriel.
2. Déterminer une base de F_1 et préciser la dimension de F_1.
3. Déterminer une base de F_2 et préciser la dimension de F_2.
4. Déterminer une base de F_3 et préciser la dimension de F_3.
5. Déduire de ce qui précède la dimension de F.
6. Soit $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $S \in F$. En déduire une base de F.
7. Montrer que $F \oplus \text{Vect}(I_2) = H$.

Partie 2 : Cas $n = 3$

On suppose dans cette partie que $n = 3$. On pose

$$\mathscr{B}_F = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

On admet que F est de dimension 4.

8. Déterminer une base de G en fonction de $E_{i,j}$.
9. Montrer que $\mathscr{B}_F$ est une base de F.
10. Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Partie 3 : Cas général

On suppose $n \geqslant 2$ quelconque.

11. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de H.
12. Montrer que $F \neq H$.
13. Soit $A \in H$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \in H$.
14. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible de E.
    (a) Montrer que $A \notin F$.
    (b) Montrer que $A \in H \Rightarrow A^{-1} \in H$.
15. Montrer que F et G sont en somme directe.
16. Déterminer $\mathscr{B}_G$ une sous-famille de $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ qui soit une base de G.
17. On pose $\mathscr{B}_F = (E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n})_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}$. Montrer que $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$ est une base de E.
18. On admet que $\mathscr{B}_F$ est une famille génératrice de F. Déterminer la dimension de F.
19. En déduire que F et G sont supplémentaires dans E.
20. Soit $A \in H$. Justifier que le réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AJ = JA = \lambda J$ est unique.
21. Par un raisonnement d'analyse-synthèse, montrer que $H = F \oplus \mathrm{Vect}(J)$.
22. En déduire la dimension de H.

Problème 2 - Séries

Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}^*}$ de réels **strictement positifs** on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

On précise que déterminer la nature d'une suite ou d'une série consiste à déterminer si la suite ou la série en question converge ou diverge.

Partie 1 : Autour du cas constant

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose dans cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = a$.
    (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, préciser p_n.
    (b) Déterminer pour chaque cas, la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n$ et en cas de convergence calculer sa somme totale.
2. On suppose dans cette question qu'il existe $r \in]1;+\infty[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant r$. Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n$.
3. On suppose dans cette question qu'il existe $r \in]0;1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant r$. Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n$.

Partie 2 : Théorème de comparaison pour le produit

On suppose dans cette partie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant 1$.

4. Déterminer la monotonie de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant b_n$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = \prod_{k=1}^{n} b_k$. On suppose que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, on note q sa limite.
   (a) Montrer que q est un majorant de $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) En déduire que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Partie 3 : Lien produit-série

Pour toute la suite, on introduit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k).$$

6. Donner pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le lien entre p_n et s_n.
7. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$.
   (a) Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   (b) En déduire que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite est strictement positive.
   (c) En déduire la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n$.
8. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$.
   (a) Déterminer la nature de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) En déduire la limite de p_n quand $n \to +\infty$.
9. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{n}$.
   (a) Déterminer la nature de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (b) En déduire que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
   (c) Reconnaître pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_n.
   (d) En déduire la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n$ et préciser sa somme totale.
10. On suppose que $a_1 = 1$ et que pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = 1 - \frac{1}{n^2}$.
    (a) Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
    (b) En déduire que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Partie 4 : Pour finir

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a_n - 1$.

11. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge absolument. Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
12. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge et que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n^2$ converge. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_n}{p_n}$.
    (a) Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
    (b) On pose par convention $p_0 = 1$.
    Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n uniquement en fonction de p_n et de p_{n-1}.
    (c) En déduire que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge.
13. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge et que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n^2$ diverge. Montrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

FIN DE L'ÉPREUVE