Commentaires du DS7
Dimension et séries

La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{Total}{50}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	P1.1	P1.2	P1.3	P1	P2.1	P2.2	P2.3	P2.4	P4	Total	Note finale
Moyenne	-1,3	5,6	1,1	1,6	8,3	3,1	2,2	5,3	0,1	10,8	17,7	8,31
Sur		16	6	28	50	8	6	25	11	50	100	20

TOTAL : 100 pt

Problème I - Espaces vectoriels et dimension 50 pt

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On note $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de E dont tous les coefficients sont égaux à 1 et on considère les espaces

$$\begin{aligned} F &= \{ A \in E \mid JA = AJ = 0_n \} \\ G &= \left\{ A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in E \;\middle|\; \forall (i,j) \in [\![1;n-1]\!],\ a_{i,j} = 0 \right\} \\ H &= \{ A \in E \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ JA = AJ = \lambda J \}. \end{aligned}$$

Sauf question explicite, on admet que tous les espaces définis sont des espaces vectoriels. Pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient ligne i colonne j.

Partie 1 : Cas $n = 2$ 16 pt

On suppose dans toute cette partie que $n = 2$. On pose

$$F_1 = \{ A \in E \mid JA = 0_2 \}, F_2 = \{ A \in E \mid AJ = 0_2 \} \text{ et } F_3 = F_1 + F_2.$$

1. 2 pt Montrer que F_1 un espace vectoriel.

   Tout le monde n'a pas eu l'intégralité des points sur cette question. Il n'est pas possible de laisser cela en l'état, il faut absolument s'entrainer encore pour savoir montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel.

2. 2 pt Déterminer une base de F_1 et préciser la dimension de F_1.

   Bien dans l'ensemble.

3. 2 pt Déterminer une base de F_2 et préciser la dimension de F_2.

   Bien dans l'ensemble.

4. 2 pt Déterminer une base de F_3 et préciser la dimension de F_3.

   Plusieurs ont confondu la somme et l'intersection. F_3 est la somme tandis que $F = F_1 \cap F_2$ et donc $F \neq F_3$. Quelques blocages pour démarrer, alors qu'un demi-point était donné pour l'écriture de $F_3 = \mathrm{Vect}\,(\mathscr{B}_{F1}, \mathscr{B}_{F2})$. Ensuite plusieurs ont cru que les 4 vecteurs étaient libres, ce qui n'était pas le cas, il fallait pivoter un peu pour éliminer un vecteur. Ensuite et ensuite seulement, on récupérait une base de F_3 dont la dimension était de 3 et non 4.

5. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déduire de ce qui précède la dimension de F.

   Il fallait avoir vu que $F = F_1 \cap F_2$ et réussi la question précédente. Une ou deux bonnes réponses seulement.

6. $\boxed{\textbf{3 pt}}$ Soit $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $S \in F$. En déduire une base de F.

   Vous avez vu facilement que $S \in F$ mais sans la question précédente, plusieurs ont tenté une arnaque de dire que $F = \mathrm{Vect}\,(S)$ sans même invoquer de dimension. Je souligne que même si $I_2 \in \mathscr{M}_2\,(\mathbb{R})$, alors cela ne signifie pas que $\mathscr{M}_2\,(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\,(I_2)$ par exemple (cela se saurait si $\mathscr{M}_2\,(\mathbb{R})$ était de dimension 1). Je rappelle aussi que les arnaques sont toujours de très mauvais effet.

7. $\boxed{\textbf{3 pt}}$ Montrer que $F \oplus \mathrm{Vect}\,(I_2) = H$.

   Très peu de réponses et encore moins de bonnes. Pourtant montrer que $F \cap \mathrm{Vect}\,(I_2)$ par exemple n'était pas difficile et pouvait déjà rapporter quelques points.

Partie 2 : Cas $n = 3$ $\boxed{\textbf{6 pt}}$

On suppose dans cette partie que $n = 3$. On pose

$$\mathscr{B}_F = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

On admet que F est de dimension 4.

8. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déterminer une base de G en fonction de $E_{i,j}$.

   Une ou deux bonnes réponses seulement. A retravailler avec le corrigé, il suffisait surtout de comprendre la définition de G.

9. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que $\mathscr{B}_F$ est une base de F.

   Plusieurs bonnes réponses mais personne n'a pensé à vérifier que les vecteurs de $\mathscr{B}_F$ étaient dans F ce qui est nécessaire.

10. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

    Une ou deux bonnes réponses.

Partie 3 : Cas général $\boxed{\textbf{28 pt}}$

On suppose $n \geqslant 2$ quelconque.

11. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que F est un sous-espace vectoriel de H.

    Très peu de bonnes réponses alors que la question est élémentaire... A retravailler !

12. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que $F \neq H$.

    Assez bien, plusieurs bonnes réponses, probablement ceux qui ont travailler leur précédent DM...

13. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Soit $A \in H$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \in H$.

    Une seule bonne réponse. Des confusions entre le λ de A et le $\mu = \lambda_k$ **l'autre constante** de A^k.

14. Soit $A \in \mathrm{GL}_n\,(\mathbb{R})$ une matrice inversible de E.

    (a) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que $A \notin F$.
    Une ou deux bonnes réponses.

(b) $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que $A \in H \Rightarrow A^{-1} \in H$.
Aucune bonne réponse.

15. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Montrer que F et G sont en somme directe.
Aucune bonne réponse.

16. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Déterminer $\mathscr{B}_G$ une sous-famille de $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ qui soit une base de G.
Non traitée.

17. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ On pose $\mathscr{B}_F = (E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n})_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1}$. Montrer que $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$ est une base de E.
Non traitée.

18. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ On admet que $\mathscr{B}_F$ est une famille génératrice de F. Déterminer la dimension de F.
Non traitée.

19. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire que F et G sont supplémentaires dans E.
Non traitée.

20. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Soit $A \in H$. Justifier que le réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AJ = JA = \lambda J$ est unique.
Pratiquement pas abordée.

21. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ Par un raisonnement d'analyse-synthèse, montrer que $H = F \oplus \text{Vect}(J)$.
Pratiquement pas abordée.

22. $\boxed{\textbf{2 pt}}$ En déduire la dimension de H.
Non traitée.

Problème II - Séries $\boxed{50 \text{ pt}}$

Pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}^*}$ de réels **strictement positifs** on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

On précise que déterminer la nature d'une suite ou d'une série consiste à déterminer si la suite ou la série en question converge ou diverge.

Partie 1 : Autour du cas constant $\boxed{8 \text{ pt}}$

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose dans cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = a$.

   (a) $\boxed{\textbf{1 pt}}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, préciser p_n.
   Facile, bien réussie dans l'ensemble.

   (b) $\boxed{\textbf{3 pt}}$ Déterminer pour chaque cas, la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} p_n$ et en cas de convergence calculer sa somme totale.
   C'est du cours, plutôt bien réussi. Gros piège, ici la somme commence à $n = 1$ et non $n = 0$ ce qui change la valeur de la somme totale. Une seule somme totale correcte.

2. $\boxed{2\text{ pt}}$ On suppose dans cette question qu'il existe $r \in]1;+\infty[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant r$. Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} p_n$.
   Assez bien dans l'ensemble. Quelques-uns sont restés sous l'hypothèse de la question précédente. Trop oublient d'écrire l'hypothèse de positivité pour utiliser le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

3. $\boxed{2\text{ pt}}$ On suppose dans cette question qu'il existe $r \in]0;1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant r$. Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} p_n$.
   Mêmes remarques.

Partie 2 : Théorème de comparaison pour le produit $\boxed{6\text{ pt}}$

On suppose dans cette partie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant 1$.

4. $\boxed{2\text{ pt}}$ Déterminer la monotonie de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   Beaucoup de parachutages. Très peu de rédactions correctes, pour écrire le quotient $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ il faut d'abord justifier que $p_n \neq 0$ puis pour passer de $\frac{p_{n+1}}{p_n} \geqslant 1$ à $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante il faut absolument passer par $p_{n+1} \geqslant p_n$ sous l'hypothèse $p_n > 0$.

5. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant b_n$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = \prod\limits_{k=1}^{n} b_k$.
   On suppose que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, on note q sa limite.
   (a) $\boxed{2\text{ pt}}$ Montrer que q est un majorant de $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   Quelques bonnes réponses et d'autres plus confuses. C'est le théorème de convergence monotone : la limite est la borne supérieure $q = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} q_n$ et est donc notamment un majorant.
   (b) $\boxed{2\text{ pt}}$ En déduire que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   Un petit coup de convergence monotone. Plusieurs bonnes réponses.

Partie 3 : Lien produit-série $\boxed{25\text{ pt}}$

Pour toute la suite, on introduit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k).$$

6. $\boxed{2\text{ pt}}$ Donner pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le lien entre p_n et s_n.
   Facile mais pas pour tout le monde. Notez que si $s_n = \ln(p_n)$ alors $p_n = \mathrm{e}^{s_n}$ ce qui était plus utile pour la suite.

7. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$.
   (a) $\boxed{2\text{ pt}}$ Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   Un classique, plusieurs bonnes réponses.
   (b) $\boxed{2\text{ pt}}$ En déduire que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite est strictement positive.
   Beaucoup de forçages : l'égalité $s_n = \ln(p_n)$ ne justifiait en rien la convergence de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ alors que $p_n = \mathrm{e}^{s_n}$ si (avec la caractérisation séquentielle de la continuité).
   (c) $\boxed{2\text{ pt}}$ En déduire la nature de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} p_n$.
   Facile mais peu de réponses.

8. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$.

   (a) $\boxed{2 \text{ pt}}$ Déterminer la nature de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   Sans difficulté mais il semblerait que l'égalité $\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}$ ne soit pas claire pour tout le monde...

   (b) $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire la limite de p_n quand $n \to +\infty$.
   Peu de réponses claires.

9. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{n}$.

   (a) $\boxed{2 \text{ pt}}$ Déterminer la nature de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   Pas difficile non plus, pas beaucoup de bonnes réponses.

   (b) $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
   Encore plus de confusion et de parachutages qu'à la question (b) précédente.

   (c) $\boxed{2 \text{ pt}}$ Reconnaître pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_n.
   Deux ou trois bonnes réponses.

   (d) $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire la nature de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} p_n$ et préciser sa somme totale.
   La série exponentielle n'est pas toujours reconnue mais dans une ou deux copies.

10. On suppose que $a_1 = 1$ et que pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = 1 - \frac{1}{n^2}$.

    (a) $\boxed{3 \text{ pt}}$ Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
    Quelques réponses partielles mais justes donnant juste la convergence (cela donnait un point). Pour la somme totale, c'était plus dure il fallait reconnaitre deux sommes télescopiques. Une belle réponse complète.

    (b) $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
    Une belle réponse.

Partie 4 : Pour finir $\boxed{11 \text{ pt}}$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a_n - 1$.

11. $\boxed{2 \text{ pt}}$ On suppose que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge absolument. Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

    Plus dure, peu de bonnes réponses.

12. On suppose que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge et que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n^2$ converge. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_n}{p_n}$.

    (a) $\boxed{3 \text{ pt}}$ Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
    Non réussie.

    (b) $\boxed{2 \text{ pt}}$ On pose par convention $p_0 = 1$.
    Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, v_n uniquement en fonction de p_n et de p_{n-1}.
    Une ou deux bonnes réponses.

    (c) $\boxed{2 \text{ pt}}$ En déduire que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge.
    Non traitée.

13. $\boxed{2 \text{ pt}}$ On suppose que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge et que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n^2$ diverge. Montrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

    Non traitée.