Corrigé du Devoir Surveillé 7
Espaces vectoriels, dimension et séries

Problème I - Espaces vectoriels et dimension

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On note $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de E dont tous les coefficients sont égaux à 1 et on considère les espaces

$$F = \{ A \in E \mid JA = AJ = 0_n \}$$
$$G = \left\{ A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in E \;\middle|\; \forall (i,j) \in [\![1; n-1]\!]^2,\ a_{i,j} = 0 \right\}$$
$$H = \{ A \in E \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ JA = AJ = \lambda J \}.$$

Sauf question explicite, on admet que tous les espaces définis sont des espaces vectoriels. Pour tout $(i,j) \in [\![1; n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient ligne i colonne j.

Partie 1 : Cas $n = 2$

On suppose dans toute cette partie que $n = 2$. On pose

$$F_1 = \{ A \in E \mid JA = 0_2 \}, F_2 = \{ A \in E \mid AJ = 0_2 \} \text{ et } F_3 = F_1 + F_2.$$

1. Montrons que F_1 un espace vectoriel. On observe les points suivants :

   - $F_1 \subset E$ par définition.
   - Soit $A = 0_2$, alors $JA = J0_2 = 0_2$. Donc $0_2 \in F_1$.
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(A, B) \in F_1^2$. Posons $C = \lambda A + \mu B$ et montrons que $C \in F_1$. On a $A \in F_1$ et $B \in F_1$ donc $JA = 0_2$ et $JB = 0_2$. Ainsi,

     $$JC = J(\lambda A + \mu B) = \lambda JA + \mu JB = \lambda 0_2 + \mu 0_2 = 0_2.$$

     Donc $C \in F_1$ et F_1 est stable par combinaisons linéaires.

   Conclusion, F_1 est un sous-espace vectoriel de E et donc

   $$\boxed{F_1 \text{ est un espace vectoriel.}}$$

2. Déterminons une base de F_1 et précisons la dimension de F_1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$. On a les

équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl} A \in F_1 & \Leftrightarrow & JA = 0_2 \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0_2 \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = 0_2 \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} a+c=0 \\ b+d=0 \end{cases} \quad \text{par unicité des coefficients d'une matrice} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} a=-c \\ b=-d \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & A = \begin{pmatrix} -c & -d \\ c & d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Dès lors,

$$F_1 = \mathrm{Vect} \underbrace{\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)}_{=\mathscr{B}_{F1}}.$$

La famille $\mathscr{B}_{F1}$ engendre F_1, de plus les deux vecteurs de $\mathscr{B}_{F1}$ ne sont pas colinéaires donc $\mathscr{B}_{F1}$ est libre et donc

$$\boxed{\mathscr{B}_{F1} = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } F_1.}$$

Par suite,

$$\boxed{\dim(F_1) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_{F1}) = 2.}$$

3. Déterminons une base de F_2 et précisons la dimension de F_2. On procède comme dans la question précédente, soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl} A \in F_2 & \Leftrightarrow & 0_2 = AJ = 0_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} a+b=0 \\ c+d=0 \end{cases} \quad \text{par unicité des coefficients d'une matrice} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} a=-b \\ c=-d \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & A = \begin{pmatrix} -b & b \\ -d & d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Dès lors,

$$F_2 = \mathrm{Vect} \underbrace{\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)}_{=\mathscr{B}_{F2}}.$$

La famille $\mathscr{B}_{F2}$ engendre F_2, de plus les deux vecteurs de $\mathscr{B}_{F2}$ ne sont pas colinéaires donc $\mathscr{B}_{F2}$ est libre et donc

$$\boxed{\mathscr{B}_{F2} = \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } F_2.}$$

Par suite,

$$\boxed{\dim(F_2) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_{F2}) = 2.}$$

4. Déterminons une base de F_3 et précisons la dimension de F_3. Par définition et ce qui précède,

$$\begin{aligned} F_3 &= F_1 + F_2 \\ &= \mathrm{Vect}\left(\mathscr{B}_{F1}\right) + \mathrm{Vect}\left(\mathscr{B}_{F2}\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\mathscr{B}_{F1}, \mathscr{B}_{F2}\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Les opérations élémentaires ne modifiant pas l'espace engendré, on a

$$\begin{aligned} F_3 &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right) \qquad C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right) \qquad C_3 \leftarrow C_3 + C_2 \\ &= \underbrace{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)}_{=\mathscr{B}_{F3}} \qquad \text{car } C_3 = C_4. \end{aligned}$$

La famille $\mathscr{B}_{F3}$ engendre F_3. Montrons que $\mathscr{B}_{F3}$ est libre. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$0_2 = a\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ a-c & b+c \end{pmatrix}.$$

Par unicité des coefficients d'une matrice,

$$\begin{cases} -a = 0 \\ -b = 0 \\ a - c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad a = b = c = 0.$$

Donc $\mathscr{B}_{F3}$ est aussi libre et donc

$$\boxed{\mathscr{B}_{F3} = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } F_3.}$$

Par suite,

$$\boxed{\dim\left(F_3\right) = \mathrm{Card}\left(\mathscr{B}_{F3}\right) = 3.}$$

5. Déduisons-en de ce qui précède la dimension de F. On observe que $F = F_1 \cap F_2$. Donc par la formule de Grassmann,

$$\begin{aligned} \dim(F) = \dim\left(F_1 \cap F_2\right) &= \dim\left(F_1\right) + \dim\left(F_2\right) - \dim\left(F_1 + F_2\right) \\ &= 2 + 2 - \dim\left(F_3\right) \\ &= 4 - 3 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\dim(F) = 1.}$$

6. Soit $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifions que $S \in F$ et déduisons-en une base de F. On a les égalités matricielles suivantes :

$$JS = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & -1+1 \\ 1-1 & -1+1 \end{pmatrix} = 0_2.$$

De même, $SJ = 0_2$. Ainsi,

$$\boxed{S \in F.}$$

La famille (S) est une famille libre de F car $S \neq 0_2$ et par la question précédente, $\mathrm{Card}\,((S)) = 1 = \dim(F)$. Conclusion,

$$\boxed{(S) \text{ est une base de } F.}$$

7. Montrons que $F \oplus \mathrm{Vect}\,(I_2) = H$. On observe que si $A \in F$, alors $AJ = JA = 0_2$ donc en prenant $\lambda = 0$, on a $AJ = JA = \lambda J$ et donc $A \in H$. Ainsi, $F \subset H$. De plus, si $A = I_2$, alors $AJ = JA = J$ donc en prenant $\lambda = 1$, on a $I_2 \in H$ et par stabilité de H en tant qu'espace vectoriel, $\mathrm{Vect}\,(I_2) \subset H$. D'autre part, soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
A \in H \quad & \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ JA = AJ = \lambda\, J \\
& \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une matrice,

$$\begin{aligned}
A \in H \quad & \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{cases} a+b = a+c = \lambda \\ a+b = b+d = \lambda \\ c+d = a+c = \lambda \quad c+d = b+d = \lambda \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{cases} a+b = \lambda \\ a+c = \lambda \\ b+d = \lambda \\ c+d = \lambda \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{cases} a+b = \lambda \\ -b+c = 0 \\ b+d = \lambda \\ c+d = \lambda \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
& \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{cases} a+b = \lambda \\ -b+c = 0 \\ c+d = \lambda \\ c+d = \lambda \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_3 + L_2 \\
& \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{cases} a = \lambda - b = \lambda - c = \lambda - \lambda + d = d \\ b = c \\ c = \lambda - d \end{cases} \qquad \text{car } L_4 = L_3 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = d \\ b = c \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} d & c \\ c & d \end{pmatrix} = dI_2 + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On observe donc que

$$H = \mathrm{Vect}\underbrace{\left(I_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)}_{=\mathscr{B}_H}.$$

La famille $\mathscr{B}_H$ est libre car les deux matrices ne sont pas colinéaires et $\mathscr{B}_H$ engendre H donc $\mathscr{B}_H$ est une base de H et $\dim(H) = 2$. Ainsi,

$$\dim(F) + \dim(\operatorname{Vect}(I_2)) = 1 + 1 = 2 = \dim(H).$$

Méthode 1, soit $A \in F \cap \operatorname{Vect}(I_2)$, alors $A \in \operatorname{Vect}(I_2)$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$, $A = aI_2$. De plus, $A \in F$ donc

$$0_2 = AJ = aI_2J = aJ.$$

Or $J \neq 0_2$ donc $a = 0$ et donc $A = 0_2$. Ainsi, $F \cap \operatorname{Vect}(I_2) \subset \{0_2\}$. Or $\{0_2\} \subset F \cap \operatorname{Vect}(I_2)$ et donc $F \cap \operatorname{Vect}(I_2) = \{0_2\}$. Au bilan,

- F et $\operatorname{Vect}(I_2)$ sont des sous-espaces de H,
- $\dim(F) + \dim(\operatorname{Vect}(I_2)) = \dim(H)$,
- $F \cap \operatorname{Vect}(I_2) = \{0_2\}$.

Conclusion,

$$\boxed{F \oplus \operatorname{Vect}(I_2) = H.}$$

Méthode 2, les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Dès lors,

$$\begin{aligned}
F + \operatorname{Vect}(I_2) &= \operatorname{Vect}(S) + \operatorname{Vect}(I_2)\\
&= \operatorname{Vect}(I_2, S)\\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right)\\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) \qquad C_2 \leftarrow C_1 - C_2\\
&= \operatorname{Vect}(\mathscr{B}_H) = H.
\end{aligned}$$

Au bilan,

- F et $\operatorname{Vect}(I_2)$ sont des sous-espaces de H,
- $\dim(F) + \dim(\operatorname{Vect}(I_2)) = \dim(H)$,
- $F + \operatorname{Vect}(I_2) = H$.

Conclusion,

$$\boxed{F \oplus \operatorname{Vect}(I_2) = H.}$$

Partie 2 : Cas $n = 3$

On suppose dans cette partie que $n = 3$. On pose

$$\mathscr{B}_F = \left(\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\right).$$

On admet que F est de dimension 4.

8. Déterminons une base de G. Par définition, on a

$$\begin{aligned}
G &= \left\{ A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in E \;\middle|\; \forall (i,j) \in [\![1;2]\!]^2,\ a_{i,j} = 0 \right\} \\
&= \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in E \;\middle|\; a_{1,1} = a_{1,2} = a_{2,1} = a_{2,2} = 0 \right\} \\
&= \left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1,3} \\ 0 & 0 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in E \;\middle|\; a_{1,1} = a_{1,2} = a_{2,1} = a_{2,2} = 0 \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\,\underbrace{(E_{1,3}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})}_{=\mathscr{B}_G}.
\end{aligned}$$

La famille $\mathscr{B}_G$ est libre en tant que sous-famille de la base canonique et engendre G. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_G = (E_{1,3}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3}) \text{ est une base de } G.}$$

9. Montrons que $\mathscr{B}_F$ est une base de F. Vérifions d'abord que les vecteurs de $\mathscr{B}_F$ sont dans F. On a

$$J\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_3.$$

De même,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in F$. En procédant de même pour les autres matrices on observe que les vecteurs de $\mathscr{B}_F$ sont dans F.

D'après l'énoncé, on sait que $\dim(F) = 4$, on a donc de plus, directement, $\dim(F) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_F) = 4$.

Montrons enfin que $\mathscr{B}_F$ est libre. Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Dès lors,

$$\begin{pmatrix} a & b & -a-b \\ c & d & -c-d \\ -a-c & -b-d & a+b+c+d \end{pmatrix} = 0_3 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = c = d = 0.$$

Donc $\mathscr{B}_F$ est libre. En résumé,

- La famille $\mathscr{B}_F$ est une famille de vecteurs de F,
- $\mathrm{Card}(\mathscr{B}_F) = \dim(F)$,
- $\mathscr{B}_F$ est libre.

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_F \text{ est une base de } F.}$$

10. Montrons que F et G sont supplémentaires dans E. Par la question précédente, $F = \mathrm{Vect}\left(\mathscr{B}_F\right)$ et par la question 8. $G = \mathrm{Vect}\left(\mathscr{B}_G\right)$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
F+G &= \mathrm{Vect}\left(\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G\right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix},\right.\\
&\qquad \left.\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Ainsi,

$$\begin{aligned}
F+G &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\right.\\
&\qquad \left.\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right) \quad \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1+C_5+C_7-C_9\\ C_2 \leftarrow C_2+C_5+C_8-C_9\\ C_3 \leftarrow C_3+C_6+C_7-C_9\\ C_4 \leftarrow C_4+C_6+C_8-C_9\end{array}\\
&= \mathscr{M}_2\left(\mathbb{R}\right),
\end{aligned}$$

car on reconnait l'intégralité des vecteurs de la base canonique de E. Donc $F+G=E$. De plus, par la question 8. $\mathscr{B}_G$ est une base de G donc

$$\dim\left(G\right) = \mathrm{Card}\left(\mathscr{B}_G\right) = 5.$$

Ainsi,

$$\dim\left(F\right) + \dim\left(G\right) = 4+5 = 9 = \dim\left(E\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{les espaces } F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E.}$$

Partie 3 : Cas général

On suppose $n \geqslant 2$ quelconque.

11. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de H.

Si $A \in F$, alors $AJ = JA = 0_n$. Donc en prenant $\lambda = 0$, on a $A \in H$. Ainsi,

$$F \subset H.$$

Si $A = 0_n$, alors $0_nJ = J0_n = 0_n$. Donc $0_n \in F$.

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(A, B) \in F^2$. Alors, $AJ = JA = 0_n$ et $BJ = JB = 0_n$. Posons $C = \lambda A + \mu B$. Alors,

$$JC = J\left(\lambda A + \mu B\right) = \lambda JA + \mu JB = \lambda 0_n + \mu 0_n = 0_n.$$

De même,

$$CJ = \left(\lambda A + \mu B\right)J = \lambda AJ + \mu BJ = \lambda 0_n + \mu 0_n = 0_n.$$

Donc $JC = CJ = 0_n$ et $C = \lambda A + \mu B \in F$, F est donc stable par combinaisons linéaires.

Conclusion,

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } H.}$$

12. Montrons que $F \neq H$. La matrice I_n vérifie $I_nJ = JI_n = J$ donc pour $\lambda = 1$, on a bien $I_n \in H$. Pourtant, $I_nJ \neq 0_n$ donc $I_n \notin F$. Conclusion,

$$\boxed{F \neq H.}$$

13. Soient $A \in H$. Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \in H$. Procédons par récurrence. Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$: « $A^k \in H$ ».

    Initialisation. Si $k = 0$, alors $A^0J = I_nJ = J = JI_n = JA^0$. Donc pour $\lambda = 1$, on a $A^0 \in H$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

    Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ et montrons que $\mathscr{P}(k+1)$ est aussi vraie. Par hypothèse de récurrence, il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que $A^kJ = JA^k = \lambda_k J$. Dès lors,

$$A^{k+1}J = A\left(A^kJ\right) = A\left(\lambda_k J\right) = \lambda_k AJ.$$

    Or $A \in H$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AJ = \lambda J$. D'où,

$$A^{k+1}J = \lambda_k \lambda J.$$

    Posons $\lambda_{k+1} = \lambda_k \lambda \in \mathbb{R}$, alors, $A^{k+1}J = \lambda_{k+1} J$. De même,

$$JA^{k+1} = JA^kA = \lambda_k JA = \lambda_k \lambda J = \lambda_{k+1} J.$$

    Donc $A^{k+1} \in H$ et $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie. Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k \in H.}$$

14. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible de E.

    (a) Montrons que $A \notin F$. Procédons par l'absurde, supposons $A \in F$. Alors, $AJ = 0_n$. Or A^{-1} existe car $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ donc $A^{-1}AJ = A^{-1}0_n \Leftrightarrow J = 0_n$ ce qui est faux. Conclusion,

$$\boxed{A \notin F.}$$

    (b) Montrons que $A \in H \Rightarrow A^{-1} \in H$. Supposons $A \in H$. Montrons que $A^{-1} \in H$. Par hypothèse, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $AJ = JA = \lambda J$ Donc en multipliant par A^{-1},

$$J = \lambda A^{-1}J.$$

    Supposons $\lambda = 0$, alors $AJ = JA = \lambda J = 0_n$ dans ce cas $A \in F$ ce qui contredit la question précédente. Donc $\lambda \neq 0$. Posons $\mu = \frac{1}{\lambda}$, on obtient

$$\mu J = A^{-1}J.$$

    De même $JA = \lambda J \Rightarrow J = \lambda JA^{-1} \Rightarrow JA^{-1} = \mu J$. D'où

$$A^{-1}J = JA^{-1} = \mu J,$$

    et $A^{-1} \in H$. Conclusion,

$$\boxed{A \in H \Rightarrow A^{-1} \in H.}$$

15. Montrons que F et G sont en somme directe. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in F \cap G$. Alors $A \in G$ et donc pour tout $(i,j) \in [\![1; n-1]\!]^2$, $a_{i,j} = 0$. Ainsi,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,n} \\ \vdots & (0) & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

De plus, $A \in F$ donc $AJ = JA = 0_n$. Donc

$$\begin{aligned}
0_n &= AJ \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,n} \\ \vdots & (0) & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{1,n} & a_{1,n} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,n} & a_{2,n} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,n} & a_{n-1,n} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1}+a_{n,2}+\dots+a_{n,n} & a_{n,1}+a_{n,2}+\dots+a_{n,n} & \dots & a_{n,1}+a_{n,2}+\dots+a_{n,n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une matrice,

$$\begin{cases} a_{1,n} = 0 \\ a_{2,n} = 0 \\ \dots \\ a_{n-1,n} = 0 \\ a_{n,1} + a_{n,2} + \dots + a_{n,n} = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad a_{1,n} = a_{2,n} = \dots = a_{n-1,n} = a_{n,n} = 0.$$

Donc $A = 0_n$. Ainsi, $F \cap G \subset \{0_n\}$. Or $\{0_n\} \subset F \cap G$. Conclusion, $F \cap G = \{0_n\}$ i.e.

$$\boxed{\text{les espaces vectoriels } F \text{ et } G \text{ sont en somme directe.}}$$

16. Déterminons $\mathscr{B}_G$ une sous-famille de $(E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ qui soit une base de G. Comme vu à la question précédente, pour $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in E$, on a

$$\begin{aligned}
A \in G \quad &\Leftrightarrow \quad \forall (i,j) \in [\![1; n-1]\!]^2,\ a_{i,j} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,n} \\ \vdots & (0) & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad A = a_{1,n}E_{1,n} + \dots + a_{n-1,n}E_{n-1,n} + a_{n,1}E_{n,1} + \dots + a_{n,n-1}E_{n,n-1} + a_{n,n}E_{n,n}.
\end{aligned}$$

D'où

$$G = \mathrm{Vect}\,\underbrace{(E_{1,n}, \dots, E_{n-1,n}, E_{n,1}, \dots, E_{n,n-1}, E_{n,n})}_{=\mathscr{B}_G}.$$

La famille $\mathscr{B}_G$ engendre donc G. De plus $\mathscr{B}_G$ est une sous-famille de la base canonique de E donc $\mathscr{B}_G$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B}_G = (E_{1,n}, \dots, E_{n-1,n}, E_{n,1}, \dots, E_{n,n-1}, E_{n,n}) \text{ est une sous-famille de } (E_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}, \text{ base de } G.}$$

17. On pose $\mathscr{B}_F = (E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n})_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1}$ et $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$. Montrons que $\mathscr{B}$ est une base de E. Montrons que $\mathscr{B}$ est libre. Soient $(\alpha_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} \in \mathbb{R}^{(n-1)^2}$ et $(\beta_i)_{1 \leqslant i \leqslant 2n-1} \in \mathbb{R}^{2n-1}$ tel que

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} \alpha_{i,j} (E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n}) + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i E_{i,n} + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_{n-1+j} E_{n,j} + \beta_{2n-1} E_{n,n} = 0_n.$$

Alors,

$$\lambda_{1,1}\begin{pmatrix}1&0&\dots&0&-1\\0&0&\dots&0&0\\\vdots&&&&\vdots\\0&0&\dots&0&0\\-1&0&\dots&0&1\end{pmatrix}+\dots+\lambda_{1,n}\begin{pmatrix}0&0&\dots&1&-1\\0&0&\dots&0&0\\\vdots&&&&\vdots\\0&0&\dots&0&0\\0&0&\dots&-1&1\end{pmatrix}$$
$$+\lambda_{2,1}\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&0\\1&0&\dots&0&-1\\\vdots&&&&\vdots\\0&0&\dots&0&0\\-1&0&\dots&0&1\end{pmatrix}+\dots+\lambda_{2,n}\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&0\\0&0&\dots&1&-1\\\vdots&&&&\vdots\\0&0&\dots&0&0\\0&0&\dots&-1&1\end{pmatrix}$$
$$+\dots$$
$$+\lambda_{n-1,1}\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&0\\0&0&\dots&0&0\\\vdots&&&&\vdots\\1&0&\dots&0&-1\\-1&0&\dots&0&1\end{pmatrix}+\dots+\lambda_{n-1,n}\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&0\\0&0&\dots&0&0\\\vdots&&&&\vdots\\0&0&\dots&1&-1\\0&0&\dots&-1&1\end{pmatrix}$$
$$+\beta_1\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&1\\0&0&\dots&0&0\\\vdots&&&&\vdots\\0&0&\dots&0&0\\0&0&\dots&0&0\end{pmatrix}+\dots+\beta_{n-1}\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&0\\0&0&\dots&0&0\\\vdots&&&&\vdots\\0&0&\dots&0&1\\0&0&\dots&0&0\end{pmatrix}$$
$$+\beta_n\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&0\\0&0&\dots&0&0\\\vdots&&&&\vdots\\0&0&\dots&0&0\\1&0&\dots&0&0\end{pmatrix}+\dots+\beta_{2n-1}\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&0\\0&0&\dots&0&0\\\vdots&&&&\vdots\\0&0&\dots&0&0\\0&0&\dots&0&1\end{pmatrix}=0_n.$$

D'où, en notant $s_i=\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_{i,j}$ et $t_j=\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_{i,j}$ et $s=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}\lambda_{i,j}$,

$$\begin{pmatrix}\lambda_{1,1}&\lambda_{1,2}&\dots&\lambda_{1,n-1}&\beta_1-s_1\\\lambda_{2,1}&\lambda_{2,2}&\dots&\lambda_{2,n-1}&\beta_2-s_2\\\vdots&&&&\vdots\\\lambda_{n-1,1}&\lambda_{n-1,2}&\dots&\lambda_{n-1,n-1}&-s_{n-1}\\\beta_n-t_1&-t_2&\dots&\beta_{2n-2}-t&\beta_n+s\end{pmatrix}=0_n.$$

Par unicité des coefficients d'une matrice,

$$\forall\,(i,j)\in[\![1;n-1]\!]^2,\ \begin{cases}\lambda_{i,j}=0\\\beta_i-s_i=0\\\beta_{n-1+j}-t_j=0\\\beta_n+s=0.\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\forall$$

Puisque pour tout $(i,j)\in[\![1;n-1]\!]^2$, $\lambda_{i,j}=0$ par suite $s_i=0$ et $t_j=0$ ainsi que $s=0$. Donc

$$\forall\,(i,j)\in[\![1;n-1]\!]^2,\ \begin{cases}\lambda_{i,j}=0\\\beta_i=0\\\beta_{n-1+j}=0\\\beta_n=0.\end{cases}$$

Finalement tous les coefficients sont nuls. Donc la famille $\mathscr{B}$ est libre. De plus,

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}(\mathscr{B}) &= \operatorname{Card}(B_F) + \operatorname{Card}(\mathscr{B}_G)\\ &= (n-1)^2 + 2n - 1\\ &= n^2 - 2n + 1 + 2n - 1\\ &= n^2 = \dim(E).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G) \text{ est une base de } E.}$$

18. On admet que $\mathscr{B}_F$ est une famille génératrice de F. Déterminons la dimension de F. Montrons que $\mathscr{B}_F$ est une base de F *(avec un nom pareil ce serait bien dommage qu'elle ne le soit pas)*. La famille $\mathscr{B}_F$ est une sous-famille de $\mathscr{B}$ et par la question précédente, $\mathscr{B}$ est libre. Par conséquent, $\mathscr{B}_F$ est aussi libre. De plus, on admet que $\mathscr{B}_F$ engendre F. Donc $\mathscr{B}_F$ est une base de F. Par conséquent,

$$\dim(F) = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_F) = (n-1)^2.$$

Conclusion,

$$\boxed{\dim(F) = (n-1)^2.}$$

19. Déduisons-en que F et G sont supplémentaires dans E. Par la question 15., F et G sont en somme directe. De plus, par la question 16. la famille $\mathscr{B}_G$ est une base de G. Donc

$$\begin{aligned}\dim(G) &= \operatorname{Card}(\mathscr{B}_G)\\ &= \operatorname{Card}(E_{1,n}, \dots, E_{n-1,n}, E_{n,1}, \dots, E_{n,n-1}, E_{n,n})\\ &= n - 1 + n - 1 + 1\\ &= 2n - 1.\end{aligned}$$

De plus, par la question 18. $\dim(F) = (n-1)^2$. Par conséquent,

$$\dim(F) + \dim(G) = (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2 = \dim(E).$$

Conclusion,

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

20. Soit $A \in H$. Justifions que le réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AJ = JA = \lambda J$ est unique. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $AJ = JA = \lambda J$ et $AJ = JA = \mu J$. Alors, $\lambda J = \mu J$ i.e. $(\lambda - \mu) J = 0_n$. Or $J \neq 0_n$ donc $\lambda - \mu = 0$ ou encore $\lambda = \mu$. Conclusion,

$$\boxed{\text{pour chaque } A \in H, \text{ le réel } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } AJ = JA = \lambda J \text{ est unique.}}$$

21. Par un raisonnement d'analyse-synthèse, montrons que $H = F \oplus \operatorname{Vect}(J)$. Soit $A \in H$. Par la question précédente, il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $JA = AJ = \lambda A$.

Analyse. Soient $(B, C) \in F \times \operatorname{Vect}(J)$ tel que $M = B + C$. Alors, $C \in \operatorname{Vect}(J)$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $C = \alpha J$. De plus, $B \in F$ donc $BF = FB = 0_n$. Dès lors,

$$AJ = BJ + CJ \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda J = 0_n + \alpha JJ = \alpha J^2.$$

Or, on observe que $J^2 = nJ$ donc $\lambda J = \alpha n J$. Or $J \neq 0_n$ donc $\lambda = \alpha n$ i.e. $\alpha = \frac{\lambda}{n}$ car $n \neq 0$. Ainsi,

$$C = \frac{\lambda}{n} J.$$

Or si A est fixé, alors il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ et donc C est fixé de manière unique. Puis,

$$B = A - C = A - \frac{\lambda}{n} J.$$

Donc de même B est entièrement fixé de façon unique lorsque A est fixé. Dès lors, F et $\mathrm{Vect}\,(J)$ sont en somme directe.

Synthèse. Posons $B = A - \frac{\lambda}{n} J$ et $C = \frac{\lambda}{n} J$. Alors,

- $B + C = A - \frac{\lambda}{n} J + \frac{\lambda}{n} J = A$.
- De plus,

$$\begin{aligned} BJ &= \left(A - \frac{\lambda}{n} J\right) J \\ &= AJ - \frac{\lambda}{n} J^2 \\ &= \lambda\, J - \frac{\lambda}{n} nJ \qquad \text{car } A \in H \text{ et } J^2 = nJ \\ &= 0_n. \end{aligned}$$

  De même, $JB = 0_n$. Donc $B \in F$.
- Enfin,

$$C = \frac{\lambda}{n} J \in \mathrm{Vect}\,(J)\,.$$

Cela démontre l'existence d'une décomposition, donc $F + \mathrm{Vect}\,(J) = H$. Conclusion,

$$\boxed{H = F \oplus \mathrm{Vect}\,(J)\,.}$$

22. Déduisons-en la dimension de H. Par la question précédente,

$$\dim(H) = \dim(F) + \dim(\mathrm{Vect}\,(J))\,.$$

Par la question 16. $\dim(F) = 2n - 1$. De plus $\dim(\mathrm{Vect}\,(J)) = \mathrm{rg}\,(J) = 1$ car $J \neq 0_n$ donc (J) est libre et donc $\mathrm{rg}\,(J) = \mathrm{Card}\,((J)) = 1$.Conclusion,

$$\dim(H) = 2n.$$

Nous avons dans ce problème déterminé la dimension de l'ensemble des matrices presque magique : celles dont la somme sur n'importe quelle ligne donne toujours le même résultat λ et la somme sur n'importe quelle colonne donne toujours ce même résultat également (elles ne sont pas magiques car les coefficients ne sont pas forcément des entiers positifs). Joli non ?

Problème II - Séries

Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}^*}$ de réels **strictement positifs** on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

On précise que déterminer la nature d'une suite ou d'une série consiste à déterminer si la suite ou la série en question converge ou diverge.

Partie 1 : Autour du cas constant

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose dans cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = a$.

(a) On a directement,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} a = a^n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = a^n.}$$

(b) Par la question précédente, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n$ est une série géométrique de raison a. Ainsi,

$$\boxed{\text{si } a \in]0;1[, \sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n \text{ converge.}}$$

De plus,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n - 1 = \frac{1}{1-a} - 1 = \frac{a}{1-a}.$$

Dans ce cas la somme totale est donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \frac{a}{1-a}.}$$

Si $a \geqslant 1$, alors $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0. Donc

$$\boxed{\text{si } a \in [1;+\infty[, \sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n \text{ diverge grossièrement donc diverge.}}$$

2. On suppose dans cette question qu'il existe $r \in]1;+\infty[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant r$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k \geqslant \prod_{k=1}^{n} r = r^n \qquad \text{car tous les termes sont positifs.}$$

Or $r > 1$, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} r^n$ diverge en tant que série géométrique de raison $r > 1$. Or

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant r^n \leqslant p_n.$$

Donc par le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n \text{ diverge.}}$$

3. On suppose dans cette question qu'il existe $r \in]0;1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant r$. On observe cette fois que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 < \prod_{k=1}^{n} a_k \leqslant \prod_{k=1}^{n} r = r^n.$$

Puisque $r \in]0;1[$, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n$ converge. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n \text{ converge.}}$$

Partie 2 : Théorème de comparaison pour le produit

On suppose dans cette partie que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant 1$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n > 0$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k > 0$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1} a_k}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k} = a_{n+1} \geqslant 1.$$

Donc, puisque $p_n > 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_{n+1} \geqslant p_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

5. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant b_n$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} b_k$. On suppose que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, on note q sa limite.

(a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \geqslant a_n \geqslant 1$. Donc de même que dans la question précédente, la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Donc par le théorème de convergence monotone, sa limite (lorsqu'elle existe et c'est le cas ici) est sa borne supérieure :

$$q = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} q_n.$$

Or la borne supérieure est le plus petit des majorants, c'est donc notamment un majorant :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad q_n \leqslant q.}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leqslant b_n$. Puisque tous les termes sont positifs,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k \leqslant \prod_{k=1}^{n} b_k = q_n.$$

Donc par la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n \leqslant q_n \leqslant q.$$

Donc la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par q (réel indépendant de n). De plus par la question 4. $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Conclusion, par le théorème de convergence monotone,

$$\boxed{(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

Partie 3 : Lien produit-série

Pour toute la suite, on introduit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(a_k\right).$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) = \ln(p_n).$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n = \ln(p_n) \text{ i.e. } p_n = \mathrm{e}^{s_n}.}$$

7. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$\ln(a_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$
   Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Puisque $\ln(a_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^2} > 0$, par le théorème des équivalents de séries à termes positifs,
   $$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(a_n) = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

   (b) Notons s sa limite. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \mathrm{e}^{s_n}$. Donc par continuité de la fonction exponentielle en s, on en déduit que
   $$\boxed{(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} p_n = \mathrm{e}^{s} > 0.}$$

   (c) Puisque $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0, on en déduit que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n$ diverge grossièrement et donc
   $$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n \text{ diverge.}}$$

8. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\ln(a_n) = \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}.$$
   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On reconnaît la série harmonique qui diverge. Conclusion,
   $$\boxed{(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \text{ diverge.}}$$

   (b) Plus précisément, la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante en tant que série de termes strictement positifs :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+1} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ s_{n+1} > s_n.$$
   Puisque qu'elle diverge, par le théorème de convergence monotone, on en déduit que
   $$\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty.$$
   Donc par composition de limites,
   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{s_n} = +\infty.}$$

9. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{n}$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\ln(a_n) = \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\ln(n).$$
   Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(a_n)$ diverge grossièrement. Conclusion,
   $$\boxed{(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(a_n) \text{ diverge.}}$$

   (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln(a_k) = -\ln(k) \leqslant 0$. Donc pour tout $n \geqslant 2$,
   $$s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(a_k) + \ln(a_n) \leqslant \ln(a_n) = -\ln(n).$$
   Or $\lim_{n\to+\infty} -\ln(n) = -\infty$. Donc par le théorème de minoration pour les suites, on en déduit que
   $$\lim_{n\to+\infty} s_n = -\infty.$$
   Conclusion, par composition de limites,
   $$\boxed{(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{s_n} = \mathrm{e}^{-\infty} = 0.}$$

   (c) Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n!}$$
   Conclusion,
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad p_n = \frac{1}{n!}.}$$

   (d) On reconnaît alors $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n!}$ la série exponentielle de paramètre $z = 1$. Conclusion,
   $$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} p_n = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n!} \text{ converge.}}$$
   De plus,
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} - 1 = \mathrm{e} - 1.$$
   Conclusion,
   $$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = \mathrm{e} - 1.}$$

10. On suppose que $a_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = 1 - \frac{1}{n^2}$.

(a) Pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
\ln(a_n) &= \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\
&= \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) \\
&= \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) \\
&= \ln(n-1) - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(n).
\end{aligned}$$

Donc

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k) = \ln(a_1) + \sum_{k=2}^{n} (\ln(k-1) - \ln(k)) + \sum_{k=2}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)).$$

On reconnaît deux sommes télescopiques. Donc

$$s_n = \ln(1) + \ln(1) - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(2) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln(2).$$

Conclusion,

$$\boxed{(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et } \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(a_k) = \lim_{n\to+\infty} s_n = -\ln(2).}$$

(b) Par continuité de la fonction exponentielle en $-\ln(2)$, on en déduit que

$$\boxed{(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{s_n} = \mathrm{e}^{-\ln(2)} = \frac{1}{2}.}$$

Partie 4 : Pour finir

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a_n - 1$.

11. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge absolument. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\ln(a_n) = \ln(1 + u_n).$$

Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge absolument, notamment elle converge. En particulier, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Donc

$$\ln(a_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad \Rightarrow \qquad |\ln(a_n)| \underset{n\to+\infty}{\sim} |u_n|.$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge absolument donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n|$ converge. De plus $|\ln(a_n)| \underset{n\to+\infty}{\sim} |u_n|$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \geqslant 0$. Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |\ln(a_n)|$ converge i.e. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(a_n)$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(a_n) = (s_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

12. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge et que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n^2$ converge. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_n}{p_n}$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\ln(a_n) = \ln(1+u_n).$$
Or la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Dès lors,
$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{=} u_n - \frac{u_n^2}{2} + o\left(u_n^2\right).$$
Par suite,
$$u_n - \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{u_n^2}{2} + o\left(u_n^2\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}.$$
Or par hypothèse, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n^2$ converge donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{u_n^2}{2}$ converge. On a

- $u_n - \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_n^2}{2} \geqslant 0$.

Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs,
$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (u_n - \ln(1+u_n)) \text{ converge.}$$
Or par hypothèse, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge. Ainsi, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(1+u_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n - \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (u_n - \ln(1+u_n))$ converge en tant que différence de deux séries convergentes :
$$\boxed{(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(a_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(1+u_n) \text{ converge.}}$$

(b) On pose par convention $p_0 = 1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a si $n \geqslant 2$,
$$u_n = a_n - 1 = \frac{p_n}{p_{n-1}} - 1 \qquad \text{car } p_{n-1} > 0$$
La formule reste vraie pour $n=1$, $u_1 = a_1 - 1 = p_1 - 1 = \frac{p_1}{p_0} - 1$ car $p_0 = 1$. Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \frac{u_n}{p_n} = \frac{\frac{p_n}{p_{n-1}} - 1}{p_n} = \frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_n}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_n}.}$$

(c) Par la question précédente, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_n}\right)$. On reconnait une somme télescopique.
Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{p_{k-1}} - \frac{1}{p_k}\right) = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_n} = 1 - \frac{1}{p_n}.$$
Par la question 12.a $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Notons s sa somme totale/sa limite. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \mathrm{e}^{s_n}$, par continuité de l'exponentielle, on en déduit que
$$(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \mathrm{e}^s > 0.$$
Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$ converge vers $1 - \mathrm{e}^{-s}$. Conclusion,
$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n \text{ converge.}}$$

13. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge et que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n^2$ diverge. Puisque $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0. Donc de même que précédemment

$$u_n - \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}.$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{u_n^2}{2}$ diverge, $_n - \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{u_n^2}{2} \geqslant 0$. Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs, on en déduit que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (u_n - \ln(1+u_n)) \text{ diverge.}$$

Plus précisément puisque

$$u_n - \ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2} \geqslant 0.$$

On en déduit qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n - \ln(1+u_n) \geqslant 0$. Par suite, la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n - \ln(1+u_n)$ est croissante. Puisqu'elle diverge, par le théorème de convergence monotone, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k - \ln(1+u_k) = +\infty.$$

D'autre part, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge. Notons U sa limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = U.$$

Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(1+u_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n - \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (u_n - \ln(1+u_n))$ est la différence d'une série convergente et d'une série divergente.

Attention, je rappelle que l'on ne peut rien dire de la différence de deux séries divergentes.

Nécessairement,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(1+u_n) \text{ diverge et même } \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln(1+u_k) = U - \infty = -\infty.$$

D'où,

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(a_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln(1+u_n) \text{ diverge vers } -\infty.$$

Or pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $p_n = \mathrm{e}^{s_n}$. Conclusion,

$$\boxed{(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } 0.}$$