Epreuve de mathématiques 8
2024-2025

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
Durée : 4h

Encadrer les résultats et numéroter les copies

lycée Raoul Follereau

Exercice 1 - Applications linéaires

On considère l'application f et l'ensemble F suivants :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} -x-2y+2z \\ x+2y-z \\ z \end{bmatrix} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad F = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; f(u) = u \right\}$$

On note classiquement $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$, puis préciser sa dimension. L'application f est-elle injective ?
4. Déterminer le rang de f. L'application f est-elle surjective ?
5. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
6. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
7. Montrer que $F = \mathrm{Im}(f)$.
8. Calculer $f^2(e_1)$, $f^2(e_2)$ et $f^2(e_3)$.
9. Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

Problème 2 - Applications linéaires

Soit E un espace vectoriel réel quelconque, et f un endomorphisme de E.

Partie 1 : Préliminaire

1. Montrer que :

$$(\bigstar) \qquad \forall (g,h) \in \mathscr{L}(E)^2, \qquad g \circ h = 0_{\mathscr{L}(E)} \iff \mathrm{Im}(h) \subset \mathrm{Ker}(g)$$

Partie 2 : Avec un polynôme de degré 2 (D'après Banque PT 2018)

2. Soit $u \in E$. Déterminer des réels λ et μ tels que :

$$u = \lambda\big[f(u) - 2u\big] + \mu\big[f(u) - u\big]$$

3. En déduire que $E = \mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E) + \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.

On suppose désormais et dans cette partie uniquement que :

$$f^2 = 3f - 2\mathrm{Id}_E$$

4. A l'aide du préliminaire, montrer que :

$$\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$$

5. En déduire que :

$$E = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$$

6. On suppose dans cette question que E est de dimension finie.
   Justifier qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que :

$$\forall u \in \mathscr{B}, \ f(u) \text{ et } u \text{ sont colinéaires}$$

Partie 3 : Avec un polynôme de degré 3 (D'après Banque PT 2014)

7. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.

On suppose désormais que :

$$f^3 = \mathrm{Id}_E$$

8. Soit $u \in E$. On pose :

$$v = \frac{1}{3}(2u - f^2(u) - f(u)) \qquad \text{et} \qquad w = \frac{1}{3}(f^2(u) + f(u) + u)$$

   (a) Calculer $(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)(v)$ et $(f - \mathrm{Id}_E)(w)$.
   (b) Vérifier que $u = v + w$. Quelle inclusion ensembliste a-t-on montrée ? *Justifier avec soin.*

9. Déduire des questions précédentes que :

$$E = \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$$

Problème 3 - Intégration

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Partie 1 : Etude de f

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la parité de f.
3. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de f en 0.
5. Montrer que pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{x^2}{2} f'(x)$.

   On pourra poser $u' = \frac{t}{(1+t^2)^2}$ *et* $v = t$.
6. En déduire que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
7. Déterminer le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 : Une intégrale à bornes variables

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose

$$G(x) = \int_{1/x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

8. Justifier que G est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.
9. Montrer que G est impaire.

On souhaite calculer G par deux méthodes :

10. *Méthode 1.*
    (a) Soit $x > 0$. A l'aide du changement de variable $s = \frac{1}{t}$ que l'on justifiera avec soin, montrer que

    $$\int_{1/x}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ln(x) - \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

    (b) En déduire une expression explicite (sans intégrale) de G sur $]0;+\infty[$.
11. *Méthode 2.*
    (a) Exprimer G à l'aide d'une primitive de f et en déduire que G est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
    (b) Montrer que

    $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G'(x) = \frac{\pi}{2x}.$$

    (c) Retrouver alors le résultat de la question 10.b
12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

    $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\arctan\left(\frac{3k+n}{2n}\right)}{3k+n}.$$

    Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et montrer que

    $$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi\ln(2)}{6}.$$

Partie 3 : Une suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$I_n = \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{n+t}\,\mathrm{d}t.$$

13. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n existe.
14. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone et préciser sa monotonie.
15. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
16. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0;1]$,
$$0 \leqslant \frac{\arctan(t)}{n+t} \leqslant \frac{\pi}{4n}.$$
17. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
18. Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \arctan(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que
$$I = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}.$$
19. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{I}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{I}{n}.$$
20. En déduire un équivalent simple de I_n quand $n \to +\infty$.

Partie 4 : Une moyenne continue

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on définit,
$$\varphi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

21. Justifier que φ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.
22. Déterminer la parité de φ.
23. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de φ en 0.
24. En déduire que φ est prolongeable par continuité en 0. On note encore φ la nouvelle fonction prolongée. Préciser $\varphi(0)$.
25. Justifier que φ est dérivable en 0 et préciser $\varphi'(0)$.
26. Montrer que φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et préciser sa dérivée en fonction de f et de φ.
27. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$.
28. En déduire les variations de φ sur $\mathbb{R}$. *On ne demande pas les limites aux bornes.*
29. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_1^x \frac{\arctan(t)}{t}\,\mathrm{d}t = 0$.
30. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)$.
31. Montrer que
$$\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\frac{\ln(x)}{x}\right).$$

Fin de l'épreuve