

Corrigé du Devoir Surveillé 8

Applications linéaires, intégration

Exercice I - Applications linéaires

On considère l'application f et l'ensemble F suivants :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -x - 2y + 2z \\ x + 2y - z \\ z \end{bmatrix} \end{cases} \quad \text{et} \quad F = \{ u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u \}$$

On note classiquement $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- Montrons que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $u = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ et $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$. On a les égalités entre vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= f\left(\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} -\lambda x_1 - \mu x_2 - 2\lambda y_1 - 2\mu y_2 + 2\lambda z_1 + 2\mu z_2 \\ \lambda x_1 + \mu x_2 + 2\lambda y_1 + 2\mu y_2 - \lambda z_1 - \mu z_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} -x_1 - 2y_1 + 2z_1 \\ x_1 + 2y_1 - z_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -x_2 - 2y_2 + 2z_2 \\ x_2 + 2y_2 - z_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v). \end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Conclusion,

$$f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^3, f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3).$$

- Déduisons-en que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Par différence de deux endomorphismes, on en déduit que $g = f - \text{Id}_E$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Or

$$F = \{ u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) = u \} = \{ u \in \mathbb{R}^3 \mid f(u) - u = 0_{\mathbb{R}^3} \} = \{ u \in \mathbb{R}^3 \mid g(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \} = \text{Ker}(g).$$

L'application g étant linéaire, $\text{Ker}(g)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Conclusion,

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.$$

3. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} u \in \text{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -x - 2y + 2z \\ x + 2y - z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2y + 2z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{car } L_1 = -L_2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{bmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Le vecteur $(-2, 1, 0)$ étant non nul il constitue une base de $\text{Ker}(f)$.

L'espace $\text{Ker}(f)$ est donc de dimension 1.

Le noyau de f n'était pas réduit au vecteur nul, on en déduit également que

f n'est pas injective.

4. Puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie, par le théorème du rang, on a, par la question précédente,

$$\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2.$$

Donc

$$\text{rg}(f) = 2.$$

On observe que $\dim(\text{Im}(f)) = \text{rg}(f) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Donc $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$. Conclusion,

l'application f n'est pas surjective.

5. La famille $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ étant une base de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect} \left(f \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), f \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right), f \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1 \end{array} \\ \text{Im}(f) &= \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Les vecteurs $(-1, 1, 0)$ et $(0, 1, 1)$ sont deux vecteurs non colinéaires et donc forment une famille libre de $\text{Im}(f)$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Im}(f) = \text{Vect}((-1, 1, 0), (0, 1, 1))}.$$

6. *Méthode 1, par l'image.* Montrons que $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. A l'aide des questions 3. et 5., on a

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) + \text{Im}(f) &= \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Or les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) + \text{Im}(f) &= \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) && C_1 \leftrightarrow C_2 \\ &= \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) && C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ &= \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) && \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_2 \end{array} \\ &= \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) && \begin{array}{l} C_1 \leftarrow -C_1 \\ C_2 \leftarrow -C_2 \end{array} \\ &= \mathbb{R}^3 && \text{car on reconnaît la base canonique de } \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

De plus par le théorème du rang, puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie, on sait que

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3).$$

Donc par la caractérisation des espaces supplémentaires en dimension finie, on en déduit que

$$\boxed{\text{Ker}(f) \text{ et } \text{Im}(f) \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^3}.$$

Méthode 2, par le noyau. Soit $u \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$. Le vecteur u appartenant à $\text{Ker}(f)$, par la question 3., on a $u \in \text{Vect}(-2, 1, 0)$. Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = (-2\lambda, \lambda, 0)$. On sait de plus que $u \in \text{Im}(f)$ et donc par la question 5. $u \in \text{Vect}((-1, 1, 0), (0, 1, 1))$ et il existe (μ_1, μ_2) tel que

$$u = \begin{bmatrix} -2\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix} = \mu_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_1 \\ \mu_1 + \mu_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{cases} -2\lambda = -\mu_1 \\ \lambda = \mu_1 + \mu_2 \\ 0 = \mu_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{\mu_1}{2} \\ \lambda = \mu_1 \\ \mu_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1 = \frac{\mu_1}{2} \\ \lambda = \mu_1 \\ \mu_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mu_1 = \lambda = \mu_2 = 0.$$

Par conséquent $u = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a donc montré que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) \subset \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. L'ensemble $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$ étant un espace vectoriel (intersection de deux espaces vectoriels), l'inclusion réciproque est également

vraie et donc $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et les espaces $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont en somme directe. De plus par le théorème du rang, puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie, on sait que

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3).$$

Donc par la caractérisation des espaces supplémentaires en dimension finie, on en déduit que

$$\boxed{\text{Ker}(f) \text{ et } \text{Im}(f) \text{ sont supplémentaires dans } \mathbb{R}^3.}$$

7. Montrons que $F = \text{Im}(f)$. Soit $u \in F$, alors par définition de F , $f(u) = u$. Le vecteur u est donc sa propre image, en particulier u admet un antécédent (lui même) par f . Donc $u \in \text{Im}(f)$. Ainsi $F \subset \text{Im}(f)$.

Réciproquement, soit $u \in \text{Im}(f)$. Par la question 5., il existe $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$u = \mu_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_1 \\ \mu_1 + \mu_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix}.$$

Dès lors,

$$f(u) = f\left(\begin{bmatrix} -\mu_1 \\ \mu_1 + \mu_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -(-\mu_1) - 2(\mu_1 + \mu_2) + 2\mu_2 \\ -\mu_1 + 2(\mu_1 + \mu_2) - \mu_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_1 \\ \mu_1 + \mu_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = u.$$

Donc $u \in F$. Ainsi $\text{Im}(f) \subset F$.

$$\boxed{\text{Conclusion, } F = \text{Im}(f).}$$

8. On a les égalités vectorielles suivantes :

$$\begin{aligned} f^2(e_1) &= f(f(e_1)) = f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -(-1) - 2 \\ -1 + 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ f^2(e_2) &= f(f(e_2)) = f\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -(-2) - 2 \times 2 \\ -2 + 2 \times 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ f^2(e_3) &= f(f(e_3)) = f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 - 2 \times (-1) + 2 \\ 2 + 2 \times (-1) - 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f^2(e_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f^2(e_2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f^2(e_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.}$$

9. Par la question précédente, on remarque que $f^2(e_1) = f(e_1)$, $f^2(e_2) = f(e_2)$, et $f^2(e_3) = f(e_3)$. Donc f et f^2 sont deux applications linéaires qui coïncident sur une base de $\mathbb{R}^3$. D'après le cours on a vu qu'il existe une unique application linéaire dont l'image de $\mathcal{B}$ donne $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$. Donc par unicité, on en déduit que $f^2 = f$.

Conclusion, $\boxed{f \text{ est un projecteur de } \mathbb{R}^3.}$

Problème II - Applications linéaires

Soit E un espace vectoriel réel quelconque, et f un endomorphisme de E .

Partie 1 : Préliminaire

1. Soit $(g, h) \in \mathcal{L}(E)^2$. Montrons que :

$$(\star) \quad g \circ h = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \text{Im}(h) \subset \text{Ker}(g)$$

Rédaction 1. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} g \circ h = 0_{\mathcal{L}(E)} &\iff \forall u \in E, g(h(u)) = 0_E \\ &\iff \forall u \in E, h(u) \in \text{Ker}(g) \\ &\iff \{h(u) \mid u \in E\} \subset \text{Ker}(g) \\ &\iff \text{Im}(h) \subset \text{Ker}(g) \end{aligned}$$

Conclusion : $\forall (g, h) \in \mathcal{L}(E)^2, g \circ h = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \text{Im}(h) \subset \text{Ker}(g)$.

Rédaction 2. Supposons $g \circ h = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrons que $\text{Im}(h) \subset \text{Ker}(g)$. Soit $y \in \text{Im}(h)$. Alors il existe $x \in E, y = h(x)$. Dès lors,

$$g(y) = g(h(x)) = g \circ h(x) = 0_E \quad \text{car } g \circ h = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Donc $y \in \text{Ker}(g)$. D'où $\text{Im}(h) \subset \text{Ker}(g)$.

Réciproquement, supposons $\text{Im}(h) \subset \text{Ker}(g)$. Montrons que $g \circ h = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Soit $x \in E$. Alors, $h(x) \in \text{Im}(h)$ et donc $h(x) \in \text{Ker}(g)$ d'après notre hypothèse. Donc

$$g(h(x)) = 0_E \iff g \circ h(x) = 0_E.$$

Ceci étant vrai pour $x \in E$ quelconque, on en déduit que $g \circ h = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Conclusion,

$$g \circ h = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \text{Im}(h) \subset \text{Ker}(g).$$

Partie 2 : Avec un polynôme de degré 2 (D'après Banque PT 2018)

2. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $u \in E$, on a l'équivalence suivante :

$$u = \lambda[f(u) - 2u] + \mu[f(u) - u] \iff u = (\lambda + \mu)f(u) + (-2\lambda - \mu)u$$

IL SUFFIT alors de chercher des réels λ, μ tels que :



$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -2\lambda - \mu = 1 \end{cases} \xLeftrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \mu = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Posons alors $(\lambda, \mu) = (-1, 1) \in \mathbb{R}^2$.

Conclusion : $(\lambda, \mu) = (-1, 1)$ convient.

3. Montrons que $E = \text{Im}(f - 2\text{Id}_E) + \text{Im}(f - \text{Id}_E)$ i.e. $\begin{cases} E \supset \text{Im}(f - 2\text{Id}_E) + \text{Im}(f - \text{Id}_E) & (i) \\ E \subset \text{Im}(f - 2\text{Id}_E) + \text{Im}(f - \text{Id}_E) & (ii) \end{cases}$.

- Comme $f - 2\text{Id}_E$ et $f - \text{Id}_E$ sont des endomorphismes de E , il vient que :

$$\underbrace{\text{Im}(f - 2\text{Id}_E)}_{\text{sev de } E} + \underbrace{\text{Im}(f - \text{Id}_E)}_{\text{sev de } E} \underset{\text{sev de } E}{\subset} E$$

- Soit $u \in E$. Montrons que $u \in \text{Im}(f - 2\text{Id}_E) + \text{Im}(f - \text{Id}_E)$.
D'après 2a), on a les égalités vectorielles suivantes :

$$\begin{aligned} u &= -(f(u) - 2u) + (f(u) - u) \\ &= -(f - 2\text{Id}_E)(u) + (f - \text{Id}_E)(u) \quad \text{par propriétés sur les fonctions} \\ &= \underbrace{(f - 2\text{Id}_E)(-u)}_{\in \text{Im}(f - 2\text{Id}_E)} + \underbrace{(f - \text{Id}_E)(u)}_{\in \text{Im}(f - \text{Id}_E)} \quad \text{par linéarité de } f - 2\text{Id}_E \end{aligned}$$

Conclusion : $E = \text{Im}(f - 2\text{Id}_E) + \text{Im}(f - \text{Id}_E)$.

4. • Montrons que $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ i.e. $(f - 2\text{Id}_E) \circ (f - \text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
(★)

On a les égalités fonctionnelles suivantes :

$$(f - 2\text{Id}_E) \circ (f - \text{Id}_E) = (1)f^2 + (-2 - 1)f + (2)\text{Id}_E = f^2 - 3f + 2\text{Id}_E \stackrel{f^2=3f-2\text{Id}_E}{=} 0_{\mathcal{L}(E)}$$

- Montrons que $\text{Im}(f - 2\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ i.e. $(f - \text{Id}_E) \circ (f - 2\text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
(★)

Le calcul est analogue au précédent.

Conclusion : $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ et $\text{Im}(f - 2\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$.

5. Montrons que $E = \underbrace{\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)}_{=F} \oplus \underbrace{\text{Ker}(f - \text{Id}_E)}_{=G}$ i.e. $\begin{cases} E = F + G & (i) \\ F \cap G = \{0_E\} & (ii) \end{cases}$

(i) $\supset$ Trivial.

$\subset$ On a l'inclusion ensembliste suivante :

$$E = \underbrace{\text{Im}(f - \text{Id}_E)}_{\subset F \text{ d'après 2b)}} + \underbrace{\text{Im}(f - 2\text{Id}_E)}_{\subset G \text{ d'après 2b)}} \subset F + G$$

(ii) $\supset$ Trivial.

$\subset$ Soit $u \in F \cap G$ i.e. $\begin{cases} u \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) \\ u \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} f(u) = 2u \\ f(u) = u \end{cases}$.

Montrons que $u = 0_E$.

Sachant que $f(u) = 2u = u$, on a les équivalences suivantes :

$$2u = u \iff u = 0_E$$

Conclusion : on a bien montré que $E = F \oplus G$.

6. On a précédemment montré que $E = \underbrace{\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)}_{=F} \oplus \underbrace{\text{Ker}(f - \text{Id}_E)}_{=G}$.

Comme E est de dimension finie, ses sous-espaces vectoriels F et G le sont aussi, ce qui autorise à poser la famille $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ avec $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ des bases respectives de F et G .

Vérifions que $\mathcal{B}$ convient i.e. $\begin{cases} \mathcal{B} \text{ est une base de } E & (i) \\ \forall u \in \mathcal{B}, f(u) \text{ et } u \text{ sont colinéaires} & (ii) \end{cases}$

(i) Comme $E = F \oplus G$, il vient par la concaténation des bases que $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ est une base de E .

(ii) Soit $u \in \mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$. Montrons que $f(u)$ et u sont colinéaires.

Comme $u \in \mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$, il vient que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{B}_F \\ \text{OU} \\ u \in \mathcal{B}_G \end{array} \right. \quad \text{d'où :} \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in F \\ \text{OU} \\ u \in G \end{array} \right. \quad \text{d'où :} \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) \\ \text{OU} \\ u \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \end{array} \right. \quad \text{d'où :} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(u) = 2u \\ \text{OU} \\ f(u) = u \end{array} \right.$$

Autrement dit, $f(u)$ et u sont toujours colinéaires.

Conclusion : il existe bien une base $\mathcal{B}$ de E telle que, pour tout $u \in \mathcal{B}$, $f(u)$ et u sont colinéaires.

Partie 3 : Avec un polynôme de degré 3 (D'après Banque PT 2014)

7. Montrons que $\text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \{0_E\}$.

☐ Trivial.

☐ Soit $u \in \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ i.e. :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \\ u \in \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E) \end{array} \right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{l} f(u) = u \\ f^2(u) + f(u) + u = 0_E \end{array} \right.$$

Montrons que $u = 0_E$.

On a les égalités vectorielles suivantes :

$$0_E = f^2(u) + f(u) + u = f(f(u)) + f(u) + u \underset{f(u)=u}{=} f(u) + 2u \underset{f(u)=u}{=} 3u$$

D'où $u = 0_E$.

Conclusion : $\text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f - \text{Id}_E) = \{0_E\}$.

8. (a) On a les égalités vectorielles suivantes :

$$\begin{aligned} \bullet \quad (f^2 + f + \text{Id}_E)(v) &= (f^2 + f + \text{Id}_E)\left(\frac{2u - f^2(u) - f(u)}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} [2f^2(u) - f^4(u) - f^3(u) + 2f(u) - f^3(u) - f^2(u) + 2u - f^2(u) - f(u)] \quad \begin{array}{l} \text{linéarité de } f \\ \text{propriétés sur les fonctions} \end{array} \\ &= \frac{1}{3} [(2 - 1 - 1)f^2(u) + (-1 + 2 - 1)f(u) + (-1 + 2 - 1)u] \quad \text{car } f^3 = f \\ &= 0_E \\ \bullet \quad (f - \text{Id}_E)(w) &= (f - \text{Id}_E)\left(\frac{1}{3}(f^2(u) + f(u) + u)\right) \\ &= \frac{1}{3} (f^3(u) + f^2(u) + f(u) - f^2(u) - f(u) - u) \quad \begin{array}{l} \text{linéarité de } f \\ \text{propriétés sur les fonctions} \end{array} \\ &= 0_E \quad \text{car } f^3 = f \end{aligned}$$

Conclusion : $(f^2 + f + \text{Id}_E)(v) = (f - \text{Id}_E)(w) = 0_E$.

(b) Trivialement, on a l'égalité $u = v + w$.

On a alors établi le résultat suivant :

$$\forall u \in E, \quad u = \underbrace{\frac{1}{3}(2u - f^2(u) - f(u))}_{\in \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E)} + \underbrace{\frac{1}{3}(f^2(u) + f(u) + u)}_{\in \text{Ker}(f - \text{Id}_E)}$$

Ce qui signifie en terme ensembliste :

$$E \subset \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E) + \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$$

L'autre inclusion étant toujours vraie, on en déduit :

Conclusion : $E = \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E) + \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$.

9. Montrons que $E = \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$

$$\text{i.e. } \begin{cases} \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f - \text{Id}_E) &= \{0_E\} & (i) \\ \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E) + \text{Ker}(f - \text{Id}_E) &= E & (ii) \end{cases}$$

(i) Démontré en question 6.

(ii) Démontré en question 7.

Conclusion,

$$\boxed{E = \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id}_E).}$$

Problème III - Intégration

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Partie 1 : Etude de f

- Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, on sait que

$$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

Donc

$$f(x) \underset{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}}{\sim} \frac{x}{x} = 1.$$

Par suite,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 1 = f(0).$$

Donc f est continue en 0. Conclusion,

la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

- Etudions la parité de f . La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et l'ensemble $\mathbb{R}$ est centré en 0. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(-x) = \frac{\arctan(-x)}{-x} = \frac{\arctan(x)}{x} = f(x) \quad \text{car } \arctan \text{ est impaire.}$$

Encore vraie en 0 et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x).$$

Conclusion,

la fonction f est paire.

- Montrons que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ d'après la question 1.
- La fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}x - \arctan(x)}{x^2} = \frac{x - (1+x^2)\arctan(x)}{(1+x^2)x^2}.$$

Or $\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Donc

$$\begin{aligned} x - (1+x^2)\arctan(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - (1+x^2)\left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - x + \frac{x^3}{3} - x^3 + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{2x^3}{3} + o(x^3). \end{aligned}$$

Donc

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\underset{x \neq 0}{=}} \frac{-\frac{2x^3}{3}}{x^2} = -\frac{2x}{3}.$$

En particulier, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut 0.

Par le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, on en déduit que f est $\mathcal{C}^1$ en 0 et $f'(0) = 0$. Or f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Conclusion,

la fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

4. Déterminons un développement limité à l'ordre 2 de f en 0. On sait que $\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Donc

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

On note que la formule fonctionne bien en 0 également. Conclusion,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

5. Montrons que pour tout $x > 0$, $\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = -\frac{x^2}{2} f'(x)$.

Soit $x \in]0; +\infty[$. Posons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} u(t) = -\frac{1}{2(1+t^2)} \\ v(t) = t. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} u'(t) = \frac{(1+t^2)'}{2(1+t^2)^2} = \frac{2t}{2(1+t^2)} = \frac{t}{(1+t^2)^2} \\ v'(t) = 1. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt &= \left[-\frac{t}{2(1+t^2)} \right]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x -\frac{1}{2(1+t^2)} dt \\ &= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int_0^x -\frac{1}{1+t^2} dt \\ &= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} [\arctan(t)]_{t=0}^{t=x} \\ &= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\arctan(x)}{2}. \end{aligned}$$

D'autre part, par la question 3.

$$-\frac{x^2}{2} f'(x) = -\frac{x^2}{2} \frac{x - (1+x^2) \arctan(x)}{(1+x^2)x^2} = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\arctan(x)}{2}.$$

Conclusion,

$$\forall x > 0, \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = -\frac{x^2}{2} f'(x).$$

6. Dédudions-en que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par la question précédente, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt.$$

Soit $x > 0$. Pour tout $t \in [0; x]$, $\frac{t^2}{(1+t^2)^2} = \left(\frac{t}{1+t^2}\right)^2 \geq 0$. Donc par croissance de l'intégrale car $x > 0$,

$$\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt \geq 0.$$

D'où,

$$\forall x > 0, \quad f'(x) \leq 0.$$

Conclusion,

la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

7. Déterminons le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}$. On sait que $f(0) = 1$ et f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc par continuité en 0 (par la question 1.) f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(x)}{x} = \ll \frac{\pi/2}{+\infty} \gg = 0.$$

Ainsi,

x	0	$+\infty$
f	1	0

Par parité de la fonction f , on conclut que

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	0	1	0

Partie 2 : Une intégrale à bornes variables

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose

$$G(x) = \int_{1/x}^x f(t) dt.$$

8. Justifions que G est bien définie sur $\mathbb{R}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors x et $\frac{1}{x}$ existe. De plus par la question 1. la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[\frac{1}{x}; x]$ ou $[x; \frac{1}{x}]$. Dès lors, $G(x)$ existe. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en conclut que

la fonction G est définie sur $\mathbb{R}^*$.

9. Montrons que G est impaire. Notons tout d'abord que $\mathbb{R}^*$ est un ensemble centré en 0. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.
On a

$$G(-x) = \int_{-1/x}^{-x} f(t) dt.$$

Posons $s = -t$ i.e. $t = -s$. Si $t = -1/x$, $s = 1/x$, si $t = -x$, $s = x$. La fonction $s \mapsto -s$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $dt = -ds$. Dès lors,

$$\begin{aligned} G(-x) &= \int_{1/x}^x f(-s)(-1) ds \\ &= - \int_{1/x}^x f(-s) ds \\ &= - \int_{1/x}^x f(s) ds \quad \text{car } f \text{ est paire d'après 2.} \\ &= -G(x). \end{aligned}$$

Conclusion,

la fonction G est impaire.

On souhaite calculer G par deux méthodes :

10. Méthode 1.

- (a) Soit $x > 0$. A l'aide du changement de variable $s = \frac{1}{t}$, montrons que

$$\int_{1/x}^1 f(t) dt = \frac{\pi}{2} \ln(x) - \int_1^x f(t) dt.$$

Posons $s = \frac{1}{t}$ i.e. $t = 1/s$. Si $t = 1/x$, $s = x$ et si $t = 1$, $s = 1$. La fonction $s \mapsto \frac{1}{s}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$. Or puisque $x > 0$, alors $\frac{1}{x} > 0$ et donc $[\frac{1}{x}; 1]$ ou $[1; 1/x]$ est inclus dans $]0; +\infty[$ donc $s \mapsto 1/s$ est $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle et $dt = -\frac{ds}{s^2}$. Donc par le théorème de changement de variable,

$$\begin{aligned} \int_{1/x}^1 f(t) dt &= \int_x^1 f\left(\frac{1}{s}\right) \left(-\frac{1}{s^2}\right) ds \\ &= \int_1^x f\left(\frac{1}{s}\right) \frac{1}{s^2} ds \\ &= \int_1^x \frac{\arctan\left(\frac{1}{s}\right)}{\frac{1}{s}} \frac{1}{s^2} ds \\ &= \int_1^x \frac{\arctan\left(\frac{1}{s}\right)}{s} ds. \end{aligned}$$

Or, on sait que pour tout $s > 0$, $\arctan(s) + \arctan\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{\pi}{2}$ donc

$$\forall s > 0, \quad \arctan\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(s).$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_{1/x}^1 f(t) dt &= \int_1^x \frac{\pi/2 - \arctan(s)}{s} ds \\ &= \int_1^x \frac{\pi}{2s} ds - \int_1^x \frac{\arctan(s)}{s} ds \\ &= \frac{\pi}{2} [\ln(|s|)]_{s=1}^{s=x} - \int_1^x f(s) ds \\ &= \frac{\pi}{2} \ln(x) - 0 - \int_1^x f(t) dt \quad \text{car la variable d'intégration est muette.} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall x > 0, \quad \int_{1/x}^1 f(t) dt = \frac{\pi}{2} \ln(x) - \int_1^x f(t) dt.$$

(b) Soit $x > 0$. Par la question précédente,

$$\int_1^x f(t) dt + \int_{1/x}^1 f(t) dt = \frac{\pi}{2} \ln(x).$$

Par la relation de Chasles,

$$\int_{1/x}^x f(t) dt = \frac{\pi}{2} \ln(x) \quad \Leftrightarrow \quad G(x) = \frac{\pi}{2} \ln(x).$$

Conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G(x) = \frac{\pi}{2} \ln(x).$$

C'est beau non ? Avec de l'arctangeante, on construit du logarithme. C'est de l'alchimie ou même de la magie !

11. Méthode 2.

(a) Exprimons G à l'aide d'une primitive de f et déduisons-en que G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x > 0$. Posons

$$F : x \mapsto \int_1^x f(t) dt.$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc par le théorème fondamental de l'analyse, la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ et est donc notamment $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x > 0$,

$$G(x) = \int_{1/x}^x f(t) dt = F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right).$$

Conclusion,

$$\forall x > 0, \quad G(x) = F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right).$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ et la fonction F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par différence et composée,

$$\text{la fonction } G \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0; +\infty[.$$

(b) Montrons que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G'(x) = \frac{\pi}{2x}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left(F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right) \right)' \\ &= F'(x) + \frac{1}{x^2} F'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= f(x) + \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{\arctan(x)}{x} + \frac{1}{x^2} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad \text{car } x \neq 0 \text{ et } \frac{1}{x} \neq 0 \\ &= \frac{\arctan(x)}{x} + \frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \\ &= \frac{\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \\ &= \frac{\pi}{2} \quad \text{car } x > 0. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G'(x) = \frac{\pi}{2x}.$$

- (c) Retrouvons alors le résultat de la question 10.b Par la question précédente, $\mathbb{R}_+^*$ étant un intervalle, on obtient

$$\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in]0; +\infty[, \quad G(x) = \frac{\pi}{2} \ln(x) + K.$$

Déterminons la constante K . Pour $x = 1$, on a par définition,

$$G(1) = \int_1^1 f(t) dt = 0.$$

Donc $0 = \frac{\pi}{2} \ln(1) + K = K$. Conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G(x) = \frac{\pi}{2} \ln(x),$$

et on retrouve bien le résultat de la question 10.b

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\arctan\left(\frac{3k+n}{2n}\right)}{3k+n}.$$

Montrons que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et montrons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\pi \ln(2)}{6}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on observe que

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{\arctan\left(\frac{3k+n}{2n}\right)}{\frac{3k+n}{2n}} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{3k+n}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{2} + k \frac{3}{2n}\right). \end{aligned}$$

Retrouvons une somme de Riemann. Posons $a = \frac{1}{2}$ et on veut $\frac{b-a}{n} = \frac{3}{2n}$ i.e. $b-a = \frac{3}{2}$ donc $b = a + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$. On pose donc $a = 1/2$ et $b = 2$. On alors, $\frac{b-a}{n} = \frac{3}{2n}$ Donc

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{3} \frac{3}{2n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{2} + k \frac{3}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{3} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right). \end{aligned}$$

On reconnaît alors bien une somme de Riemann. Or f est continue sur $[a; b] = [1/2; 2]$. Donc on en déduit que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{3} \int_{1/2}^2 f(t) dt = \frac{2}{3} G(2).$$

Par ce qui précède,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{3} \frac{\pi}{2} \ln(2) = \frac{\pi}{6} \ln(2).$$

Partie 3 : Une suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{n+t} dt.$$

13. Justifions que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n existe. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $t \in [0; 1]$, $n+t \geq n > 0$. Donc $t \mapsto \frac{\arctan(t)}{n+t}$ est continue sur $[0; 1]$. Dès lors, I_n existe. Conclusion,

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n existe.

14. Montrons que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone et précisons sa monotonie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [0; 1]$, on a

$$0 < n+t \leq n+1+t.$$

Donc

$$0 < \frac{1}{n+1+t} \leq \frac{1}{n+t}.$$

De plus, $\arctan(t) \geq 0$ donc

$$0 \leq \frac{\arctan(t)}{n+1+t} \leq \frac{\arctan(t)}{n+t}.$$

Par croissance de l'intégrale, car les bornes sont dans le bon sens,

$$0 \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

Conclusion,

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

15. Déduisons-en que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0; 1]$, on a

$$0 \leq \frac{\arctan(t)}{n+t}.$$

Donc par positivité de l'intégrale, car les bornes sont dans le bon sens,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n.$$

Ainsi la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est minorée par 0. Or par la question précédente, $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. Donc par le théorème de convergence monotone,

la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

16. Justifions que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0; 1]$,

$$0 \leq \frac{\arctan(t)}{n+t} \leq \frac{\pi}{4n}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par croissance de la fonction $\arctan$ sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0; 1]$,

$$\forall t \in [0; 1], \quad 0 = \arctan(0) \leq \arctan(t) \leq \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

De plus, $n+t \geq n > 0$. Donc

$$\forall t \in [0; 1], \quad 0 \leq \frac{\arctan(t)}{n+t} \leq \frac{\pi}{4(n+t)}.$$

Or $n+t \geq n$. Donc $\frac{1}{n+t} \leq \frac{1}{n}$. Conclusion,

$\forall t \in [0; 1], \quad 0 \leq \frac{\arctan(t)}{n+t} \leq \frac{\pi}{4n}.$

17. Dédudons-en la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Par la question précédente et la croissance de l'intégrale, car les bornes sont dans le bon sens,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 0 \, dt \leq \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{n+t} \, dt \leq \int_0^1 \frac{\pi}{4n} \, dt \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{4n}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4n} = 0$. Conclusion, par le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.}$$

18. Soit $I = \int_0^1 \arctan(t) \, dt$. Montrons que

$$I = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}.$$

Posons

$$\forall t \in [0; 1], \quad \begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = \arctan(t). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ et

$$\forall t \in [0; 1], \quad \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v'(t) = \frac{1}{1+t^2}. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \arctan(t) \, dt \\ &= [t \arctan(t)]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} \, dt \\ &= \arctan(1) - 0 - \left[\frac{1}{2} \ln(|1+t^2|) \right]_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}.$$

19. Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{I}{n+1} \leq I_n \leq \frac{I}{n}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [0; 1]$, on a

$$0 < n \leq n+t \leq n+1.$$

Donc

$$0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+t} \leq \frac{1}{n}.$$

Or $\arctan(t) \geq 0$ donc

$$\forall t \in [0; 1], \quad \frac{\arctan(t)}{n+1} \leq \frac{\arctan(t)}{n+t} \leq \frac{\arctan(t)}{n}.$$

Par croissance de l'intégrale car les bornes sont dans le bon sens,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{n+1} dt &\leq \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{n+t} dt \leq \int_0^1 \frac{\arctan(t)}{n} dt \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \int_0^1 \arctan(t) dt &\leq I_n \leq \frac{1}{n} \int_0^1 \arctan(t) dt. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{I}{n+1} \leq I_n \leq \frac{I}{n}.}$$

20. Dédudons-en un équivalent simple de I_n quand $n \rightarrow +\infty$. On a $n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n+1$ donc par passage à l'inverse,

$$\frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{I}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{I}{n+1} \quad \text{car } I \neq 0$$

Donc par la question précédente et le théorème d'encadrement des équivalents,

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{I}{n} = \frac{\pi - 2 \ln(2)}{4n}.$$

Conclusion,

$$\boxed{I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi - 2 \ln(2)}{4n}.}$$

Partie 4 : Une moyenne continue

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on définit,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

21. Justifions que φ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Par la question 1. la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0; x]$ (ou $[x; 0]$) donc $\int_0^x f(t) dt$ existe. De plus, $x \neq 0$ donc $\frac{1}{x}$ existe. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}^* .}$$

22. Déterminons la parité de φ . On commence par noter que $\mathbb{R}^*$ est centré en 0. De plus,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \varphi(-x) &= -\frac{1}{x} \int_0^{-x} f(t) dt \\ &= -\frac{1}{x} \int_0^x f(-s) (-1) ds \quad \text{en posant } s = -t \text{ comme dans la question 9.} \\ &= \frac{1}{x} \int_0^x f(s) ds \quad \text{car } f \text{ est paire} \\ &= \varphi(x). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est paire.}}$$

23. Déterminons un développement limité à l'ordre 2 de φ en 0. Par la question 4. $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)$. De plus, comme f est continue sur $\mathbb{R}$, par le théorème fondamental de l'analyse,

$$F_0 : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Donc par le théorème de primitivation du développement limité,

$$F_0(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} F_0(0) + x - \frac{x^3}{9} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{9} + o(x^3).$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\varphi(x) = \frac{1}{x} F_0(x)$. Conclusion,

$$\varphi(x) \underset{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}}{=} 1 - \frac{x^2}{9} + o(x^2).$$

24. Dédisons-en que φ est prolongeable par continuité en 0. On note encore φ la nouvelle fonction prolongée. Précisons $\varphi(0)$. Par la question précédente,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \varphi(x) = 1 \text{ et donc existe dans } \mathbb{R}.$$

Conclusion,

$$\varphi \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } \varphi(0) = 1.$$

25. Justifions que φ est dérivable en 0 et précisons $\varphi'(0)$. Par la précédente, le développement limité de la question 23. est encore vraie en 0. Donc

$$\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{9} + o(x^2).$$

Par troncature, φ admet un développement limité d'ordre 1 en 0 : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 0 \times x + o(x)$. Conclusion,

$$\text{la fonction } \varphi \text{ est dérivable en 0 et } \varphi'(0) = 1.$$

26. Montrons que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et précisons sa dérivée en fonction de f et de φ . On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\varphi(x) = \frac{F_0(x)}{x},$$

avec F_0 une primitive de f et donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par quotient de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas,

$$\text{la fonction } \varphi \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*.$$

De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \varphi'(x) = \frac{F_0'(x)x - F_0(x)}{x^2} = \frac{f(x)x - F_0(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \left(f(x) - \frac{F_0(x)}{x} \right) = \frac{1}{x} (f(x) - \varphi(x)).$$

Conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \varphi'(x) = \frac{f(x) - \varphi(x)}{x}.$$

27. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \leq \varphi(x) \leq 1$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par la question 7. la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[0; x]$:

$$\forall t \in [0; x], \quad 1 = f(0) \geq f(t) \geq f(x).$$

Par croissance de l'intégrale car $x > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^x f(x) dt &\leq \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^x 1 dt &\Leftrightarrow & x f(x) \leq \int_0^x f(t) dt \leq x \\ &&\Leftrightarrow & f(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \leq 1. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) \leq \varphi(x) \leq 1.$$

28. Dédudions-en les variations de φ sur $\mathbb{R}$. Par la question 26. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\varphi'(x) = \frac{f(x)-\varphi(x)}{x}$ et par la question précédente, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) - \varphi(x) \leq 0$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(x) \leq 0.$$

La fonction φ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par continuité de la fonction φ en 0, on en déduit que φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Par parité de la fonction φ , on en déduit que φ est croissante sur $\mathbb{R}_-$. Conclusion,

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f		1	

29. Montrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x \frac{\arctan(t)}{t} dt = 0$. Soit $x \geq 1$. On observe que

$$\forall t \in [1; x] \subset \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq \arctan(t) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\forall t \in [1; x], \quad 0 \leq \frac{\arctan(t)}{t} \leq \frac{\pi}{2t} \quad \text{car } t > 0.$$

Par croissance de l'intégrale car $x \geq 1$,

$$0 \leq \int_1^x \frac{\arctan(t)}{t} dt \leq \int_1^x \frac{\pi}{2t} dt = \frac{\pi}{2} [\ln(|t|)]_{t=1}^{t=x} = \frac{\pi \ln(x)}{2}.$$

Ainsi,

$$\forall x \geq 1, \quad 0 \leq \frac{1}{x} \int_1^x \frac{\arctan(t)}{t} dt \leq \frac{\pi \ln(x)}{2x} \quad \text{car } x > 0.$$

Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi \ln(x)}{2x} = 0$. conclusion, par le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x \frac{\arctan(t)}{t} dt = 0.}$$

30. Dédudions-en $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$. Pour tout $x \geq 1$, par la relation de Chasles,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt + \frac{1}{x} \int_1^x \frac{\arctan(t)}{t} dt.$$

Puisque $J = \int_0^1 f(t) dt$ est un nombre fixé indépendant de x , on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt = 0.$$

Donc par somme et la question précédente, on en conclut que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0.}$$

31. Montrons que

$$\varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{\ln(x)}{x}\right).$$

Par la question précédente,

$$\forall x \geq 1, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt + \frac{1}{x} \int_1^x \frac{\arctan(t)}{t} dt.$$

Or $1 \ll x \rightarrow +\infty \ln(x)$ donc

$$\frac{1}{x} \int_0^1 f(t) dt = \frac{J}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{J}{x} \ln(x)\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{\ln(x)}{x}\right).$$

De plus, par la question 29.

$$\forall x \geq 1, \quad 0 \leq \frac{1}{x} \int_1^x \frac{\arctan(t)}{t} dt \leq \frac{\pi \ln(x)}{2x}.$$

En particulier,

$$\frac{1}{x} \int_1^x \frac{\arctan(t)}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{\ln(x)}{x}\right).$$

Par somme,

$$\boxed{\varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{\ln(x)}{x}\right).}$$