DS9 - CCB Lundi 12 mai 2025

# Epreuve de Mathématiques

Durée 4 h

**Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.**

---

## L'usage de calculatrices est interdit.

### AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. **Les questions non correctement référencées ne seront pas notées**. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES :

- Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
- L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.
- Remplir sur chaque copie en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : nom, prénom, numéro inscription, date de naissance, le libellé du concours, le libellé de l'épreuve et la session.
- Une feuille, dont l'entête n'a pas été intégralement renseigné, ne sera pas prise en compte.
- Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Les questions marquées d'un * ont été modifiées ou ajoutées par rapport au sujet initial

**Tournez la page S.V.P**

# Problème 1 - Représentation matricielle

## Partie 1 : Mise en place des matrices

On note $j$ le complexe $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$. Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, on définit les fonctions suivantes :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{x} \end{array}, \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{jx} \end{array}, \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{j^2x} \end{array}.$$

On pose alors $\mathscr{C} = (f_1, f_2, f_3)$ et $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(\mathscr{C})$. On note également

$$\tau : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & jx \end{array}.$$

Enfin pour tout $f \in E$, on pose $T(f) = f \circ \tau$.

1. (a) Soient $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$ tel que $x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 = 0_{\mathscr{F}(\mathbb{C},\mathbb{C})}$. Montrer que

$$(\mathcal{S}) \ : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + jx_2 + j^2 x_3 = 0 \\ x_1 + j^2 x_2 + jx_3 = 0 \end{cases}$$

   *On pourra penser à dériver.*

   (b) Résoudre $(\mathcal{S})$.
2. Montrer que $\mathscr{C}$ est une base de $E$ en déduire la dimension de $E$.
3. Montrer que $T(\mathscr{C}) = (f_2, f_3, f_1)$.
4. Montrer que $T$ est un endomorphisme de $E$.
5. Montrer que $T \in \mathrm{GL}(E)$.
6. Calculer $M = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(T)$.

On pose $u = -T - T^2$, $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(u)$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
8. Préciser $u(f_1)$.
9. Préciser $v$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à $B$.

On note $w$ l'endomorphisme de $E$ tel que $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(w)$.

10. Soit $f \in E$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. Déterminer $w(f)$.

## Partie 2 : Trigonalisation de $B$

On pose $a = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

11. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Déterminer suivant la valeur de $\lambda$, $\operatorname{Ker}(B - \lambda I_3)$.
12. Montrer que $(a, b)$ est une base de $\operatorname{Ker}(B - 2I_3)$. En déduire $\operatorname{Ker}(w - 2\mathrm{Id}_E)$.
13. Déterminer une base de $\operatorname{Im}(B - 2I_3)$. En déduire $\operatorname{Im}(w - 2I_E)$.
14. Soient $x \in \mathbb{C}^*$ et $c = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Montrer que $\mathscr{B}_v = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{C}^3$.
15. Montrer qu'il existe une valeur de $x \in \mathbb{C}^*$ que l'on déterminera telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_v}(v) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

## Partie 3 : Diagonalisation de $A$

On pose $e_1 = f_1 - f_3$, $e_2 = f_2 - f_3$, $e_3 = f_1 + f_2 + f_3$, $\mathscr{B}_u = (e_1, e_2, e_3)$ et enfin $P = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}_u)$.

16. Calculer $P$.
17. Calculer $\mathrm{rg}(P)$.
18. Justifier que $\mathscr{B}_u$ est une base de $E$.
19. Calculer $u(\mathscr{B}_u)$.
20. En déduire $D$ la matrice de $u$ dans $\mathscr{B}_u$.
21. Préciser sans calcul la relation entre $A$ et $D$.
22. Simplifier $\frac{2e_1 - e_2 + e_3}{3}$.
23. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n(f_1) = \lambda f_1 + \mu_n (f_1 + f_2 + f_3)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante et $\mu_n \in \mathbb{R}$ un réel ne dépendant que de $n$ que l'on précisera.

## Partie 4 : Vecteurs propres de $A$ et $B$

On considère les ensembles suivants :

$$\mathscr{E}_A = \left\{ X \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; \exists \lambda \in \mathbb{C},\ AX = \lambda X \right\}$$
$$\mathscr{E}_B = \left\{ X \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; \exists \mu \in \mathbb{C},\ BX = \mu X \right\}$$

24. Montrer que $\mathscr{E}_B = \operatorname{Ker}(B - 2I_3)$.
25. Soient $X \in \mathbb{C}^3$ et $Y = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_u}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$X \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I_3) \iff Y \in \operatorname{Ker}(D - \lambda I_3).$$

26. En déduire que $\mathscr{E}_A = \operatorname{Ker}(A - I_3) \cup \operatorname{Ker}(A + 2I_3)$.

# Problème 2 - Analyse (d'après banque PT 2015)

*Les questions avec un astérisque ont été modifiées par rapport au sujet initial.*

## Partie 1 : Fonctions et encadrements

Soit $n$ un entier naturel non nul. On considère les fonctions $f_n$ et $g_n$ définies, pour tout réel $x$, par

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}} - \frac{x^2}{n} - 1 \quad \text{et} \quad g_n(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n}} + \frac{x^2}{n} - 1.$$

1. Etudier la parité de $f_n$ et $g_n$. En déduire un domaine d'étude de ces fonctions.
2. On souhaite ici tracer les courbes représentatives des fonctions $f_1$ et $g_1$ sur un même graphe.
   (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f_1(x) - g_1(x)$ à l'aide de la fonction sinus hyperbolique.
   (b) Montrer que pour tout réel $t \geqslant 0$,
   $$\mathrm{sh}(t) \geqslant t.$$
   En déduire que $f_1(x) \geqslant g_1(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.
   (c) A l'aide de ces éléments, représenter sur un même graphe les courbes représentatives respectives des fonctions $f_1$ et $g_1$ sur $[0; 1]$ dans un repère orthonormé direct.
   On prendra comme unité 10 cm.
3. On suppose $n \geqslant 2$.
   (a) Calculer, pour tout réel $x$, $f_n'(x)$ et $g_n'(x)$.
   (b) Etudier les variations de $f_n$ et $g_n$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) Montrer que, pour tout réel positif : $f_n(x) \geqslant 0$ et $g_n(x) \geqslant 0$.
   (d) En déduire, pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0; \sqrt{n}]$,
   $$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$
   L'inégalité de droite est-elle encore vraie sur $\mathbb{R}_+$ ?
   (e) Dans cette question, on suppose $x$ fixé dans $\mathbb{R}_+$. Déterminer :
   $$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$
   (f) Montrer que pour tout réel positif $x$ :
   $$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \leqslant \frac{1}{1+x^2}.$$
   (g) * Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ existe et calculer sa valeur.
   (h) * En déduire que
   $$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

## Partie 2 : Intégration, équation différentielle

Pour tout réel $t \geqslant 0$, on pose
$$h(t) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-tx^2}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

4. * Montrer que $h$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.
5. Que vaut $h(0)$ ?
6. Montrer que $h$ est monotone sur $\mathbb{R}_+$, et en déduire que, pour tout réel positif,
$$0 \leqslant h(t) \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

On pose pour tout réel $t$ positif,
$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

7. * Montrer que $\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
8. * Montrer que pour tout réel positif $t$,
$$\varphi\left(\sqrt{t}\right) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x.$$
9. * On admet que $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tout réel positif $t$,
$$h'(t) = \int_0^1 \frac{-x^2}{1+x^2}\,\mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x.$$
Montrer que $h$ vérifie pour tout réel positif $t$, l'équation différentielle $(\mathcal{E})$
$$h'(t) - h(t) = -\varphi\left(\sqrt{t}\right).$$
10. Donner la solution générale, sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$ associée à $(\mathcal{E})$.

## Partie 3 : Série - approche numérique d'une intégrale

11. Etudier la convergence de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$.
12. * Pour tout réel $t$, montrer la convergence et calculer la somme totale de la série de terme général $\frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}$.
13. * A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle, montrer que pour tout réel $t$ entre 0 et 1 et tout entier naturel $n$,
$$\left|\mathrm{e}^{-t^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, t^{2k}}{k!}\right| \leqslant \frac{t^{2n+2}}{(n+1)!}.$$
14. * En déduire que pour tout entier naturel $n$,
$$\left|\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!\,(2n+3)}.$$
15. Montrer que
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)}.$$
16. Donner un nombre rationnel $r$ qui soit une valeur numérique approchée de $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ à $10^{-3}$ près ($r$ pourra être laissé sous forme de somme de fractions : il n'est pas demandé d'exprimer $r$ sous forme de fraction irréductible ni d'en donner une valeur numérique approchée).