

Corrigé du DS9 - Concours blanc représentation matricielle, analyse

Problème I - Représentation matricielle

Partie 1 : Mise en place des matrices

On note j le complexe $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Dans le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, on définit les fonctions suivantes :

$$f_1 : \begin{matrix} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^x \end{matrix}, \quad f_2 : \begin{matrix} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{jx} \end{matrix}, \quad f_3 : \begin{matrix} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{j^2x} \end{matrix}.$$

On pose alors $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ et $E = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C})$. On note également

$$\tau : \begin{matrix} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & jx \end{matrix}.$$

Enfin pour tout $f \in E$, on pose $T(f) = f \circ \tau$.

1. (a) Soient $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$ tel que $x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})}$. Posons g la restriction de la fonction $x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3$ aux réels : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = x_1 f_1(x) + x_2 f_2(x) + x_3 f_3(x) = x_1 e^x + x_2 e^{jx} + x_3 e^{j^2x}.$$

En particulier, pour $x = 0$, on a

$$0 = g(0) = x_1 + x_2 + x_3.$$

De plus la fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= x_1 e^x + j x_2 e^{jx} + j^2 x_3 e^{j^2x} \\ g''(x) &= x_1 e^x + j^2 x_2 e^{jx} + j^4 x_3 e^{j^2x} \end{aligned}$$

Or $j^3 = 1$ et $j^4 = j$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g''(x) = x_1 e^x + j^2 x_2 e^{jx} + j x_3 e^{j^2x}$. Or $g = 0_{\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})}$ implique que $g' = g'' = 0_{\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})}$. Donc en particulier,

$$\begin{aligned} 0 &= g'(0) = x_1 + j x_2 + j^2 x_3 \\ 0 &= g''(0) = x_1 + j^2 x_2 + j x_3. \end{aligned}$$

Conclusion, on obtient :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + j x_2 + j^2 x_3 = 0 \\ x_1 + j^2 x_2 + j x_3 = 0 \end{cases}.$$

(b) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}) &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ (j-1)x_2 + (j^2-1)x_3 = 0 \\ (j^2-1)x_2 + (j-1)x_3 = 0 \end{cases} & \begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - L_1 \end{aligned} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + (j+1)x_3 = 0 \\ (j+1)x_2 + x_3 = 0 \end{cases} & \text{car } j-1 \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + (j+1)x_3 = 0 \\ (1-(j+1)^2)x_3 = 0 \end{cases} & L_3 \leftarrow L_3 - (j+1)L_2 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + (j+1)x_3 = 0 \\ (-j^2-2j)x_3 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + (j+1)x_3 = 0 \\ -j(j+2)x_3 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} & \text{car } j \neq 0 \text{ et } j+2 \neq 0.
 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$(\mathcal{S}) \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

2. Montrons que $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ est libre. Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$ tel que $x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})}$. Alors par les questions précédentes, (x_1, x_2, x_3) est solution de $(\mathcal{S})$ et donc $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Donc $\mathcal{C}$ est libre. Or par définition de E , $\mathcal{C}$ est une famille génératrice de E . Conclusion,

$$\mathcal{C} \text{ est une base de } E \text{ et } \dim(E) = \text{Card}(\mathcal{C}) = 3.$$

3. Calculons pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
 T(f_1)(x) &= f_1 \circ \tau(x) = f_1(jx) = e^{jx} = f_2(x) \\
 T(f_2)(x) &= f_2 \circ \tau(x) = f_2(jx) = e^{j(jx)} = e^{j^2 x} = f_3(x) \\
 T(f_3)(x) &= f_3 \circ \tau(x) = f_3(jx) = e^{j^2(jx)} = e^{j^3 x} = e^x = f_1(x).
 \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{C}$, on a bien $T(f_1) = f_2$, $T(f_2) = f_3$ et $T(f_3) = f_1$. Conclusion,

$$T(\mathcal{C}) = (f_2, f_3, f_1).$$

4. Montrons que T est linéaire. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et tout $(f, g) \in E^2$, on pose $h = \lambda f + \mu g$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{C}$, on a

$$T(h)(x) = h \circ \tau(x) = h(jx) = \lambda f(jx) + \mu g(jx) = \lambda f \circ \tau(x) + \mu g \circ \tau(x) = \lambda T(f)(x) + \mu T(g)(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{C}$, on a donc $T(\lambda f + \mu g) = T(h) = \lambda T(f) + \mu T(g)$. Donc T est linéaire. Montrons maintenant que T est à valeurs dans E . Soit $f \in E = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C})$. Alors, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$ tel que $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3$. Donc par linéarité de T , on a

$$T(f) = T(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3) = \lambda_1 T(f_1) + \lambda_2 T(f_2) + \lambda_3 T(f_3).$$

Donc par la question précédente,

$$T(f) = \lambda_1 f_2 + \lambda_2 f_3 + \lambda_3 f_1 \in \text{Vect}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}) = E$$

Donc $T : E \rightarrow E$. Conclusion,

$$T \in \mathcal{L}(E) \text{ est un endomorphisme de } E.$$

5. T est une endomorphisme de E de plus, par la question 3. l'image de $\mathcal{C}$ par T est donnée par $T(\mathcal{C}) = (f_2, f_3, f_1)$. Or par permutation circulaire des vecteurs, on a

$$\text{rg}(f_2, f_3, f_1) = \text{rg}(f_1, f_2, f_3) = \text{rg}(\mathcal{C}) = 3 \quad \text{car } \mathcal{C} \text{ est libre.}$$

Donc $\text{rg}(T(\mathcal{C})) = 3 = \dim(E) = \text{Card}(T(\mathcal{C}))$. Donc $T(\mathcal{C})$ est libre et génératrice de E . Donc $T(\mathcal{C})$ est une base de E . Donc T envoie une base sur une base et donc T est un isomorphisme. Conclusion,

$$T \in \text{GL}(E) \text{ est un automorphisme de } E.$$

6. On sait que $T(f_1) = f_2$, $T(f_2) = f_3$, $T(f_3) = f_1$. On a donc directement

$$M = \text{mat}_{\mathcal{C}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On pose } u = -T - T^2, \quad A = \text{mat}_{\mathcal{C}}(u), \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. On a directement

$$\begin{aligned} A = -M - M^2 &= -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Puisque $A = \text{mat}_{\mathcal{C}}(u)$. On a directement $u(f_1) = -f_2 - f_3$ i.e.

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad u(f_1)(x) = -f_2(x) - f_3(x) = -e^{jx} - e^{j^2x}.$$

9. Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à B . Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, on a

$$v(x, y, z) = B \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 3y - z \\ 2y \\ x - 3y + z \end{bmatrix}.$$

Conclusion,

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{C}^3, \quad v(x, y, z) = (3x - 3y - z, 2y, x - 3y + z).$$

On note w l'endomorphisme de E tel que $B = \text{mat}_{\mathcal{E}}(w) = B$.

10. Soit $f \in E$ tel que $\text{mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. Déterminer $w(f)$. Notons $X = \text{mat}_{\mathcal{E}}(f)$ et $Y = \text{mat}_{\mathcal{E}}(w(f))$.

Alors, on a

$$Y = BX = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 - 3x_2 - x_3 \\ 2x_2 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Donc

$$w(f) = (3x_1 - 3x_2 - x_3)f_1 + 2x_2f_2 + (x_1 - 3x_2 + x_3)f_3.$$

Partie 2 : Trigonalisation de B

On pose $a = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

11. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(B - \lambda I_3) &\Leftrightarrow (B - \lambda I_3)X = 0_{\mathbb{C}^3} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -3 & -1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & -3 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{C}^3} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} (3 - \lambda)x - 3y - z \\ (2 - \lambda)y \\ x - 3y + (1 - \lambda)z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (3 - \lambda)x - 3y - z = 0 \\ (2 - \lambda)y = 0 \\ x - 3y + (1 - \lambda)z = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Premier cas, si $\lambda = 2$. Alors,

$$X \in \text{Ker}(B - 2I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ x - 3y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3y + z.$$

Donc

$$\text{Ker}(f - 2I_3) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Les deux vecteurs obtenus n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre et donc une base de $\text{Ker}(f - 2I_3)$.

Deuxième cas, supposons que $\lambda \neq 2$. Dès lors,

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(B - \lambda I_3) &\Leftrightarrow \begin{cases} (3 - \lambda)x - z = 0 \\ y = 0 \\ x + (1 - \lambda)z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = (3 - \lambda)x \\ y = 0 \\ x + (1 - \lambda)(3 - \lambda)x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 X \in \text{Ker}(B - \lambda I_3) &\Leftrightarrow \begin{cases} z = (3 - \lambda)x \\ y = 0 \\ (1 + 3 - 4\lambda + \lambda^2)x = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} z = (3 - \lambda)x \\ y = 0 \\ (4 - 4\lambda + \lambda^2)x = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} z = (3 - \lambda)x \\ y = 0 \\ (\lambda - 2)^2 x = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} z = (3 - \lambda)x \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{car } \lambda \neq 2 \\
 &\Leftrightarrow x = y = z = 0.
 \end{aligned}$$

Dans ce cas, $\text{Ker}(B - \lambda I_3) = \{0_{\mathbb{C}^3}\}$.

Conclusion,

$$\text{Ker}(B - \lambda I_3) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{2\}, \text{Ker}(B - \lambda I_3) = \{0_{\mathbb{C}^3}\}.$$

12. Par la question précédente, on a $\text{Ker}(B - 2I_3) = \text{Vect}(a, b)$ donc (a, b) est une famille génératrice de $\text{Ker}(B - 2I_3)$. De plus les vecteurs ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre. Conclusion,

$$(a, b) = \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \text{ est une base de } \text{Ker}(B - 2I_3).$$

Attention, si vous avez obtenu une autre famille précédemment, il faut effectuer des opérations élémentaires pour reconstruire (a, b) .

Puisque $B - 2I_3 = \text{mat}_{\mathcal{E}}(w - 2\text{Id}_E)$, alors, on obtient que

$$\text{Ker}(w - 2\text{Id}_E) = \text{Vect}(3f_1 + f_2, f_1 + f_3).$$

13. Par la question précédente, on a $\dim(\text{Ker}(B - 2I_3)) = \text{Card}(a, b) = 2$. Donc par le théorème du rang,

$$\text{rg}(B - 2I_3) = 3 - \dim(\text{Ker}(B - 2I_3)) = 3 - 2 = 1.$$

Donc une seule colonne non nulle de $B - 2I_3$ suffit à engendrer toute l'image (qui est donc une droite vectorielle). Or $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Conclusion,

$$\text{Im}(B - 2I_3) = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \text{Vect}(b).$$

Et ainsi,

$$\text{Im}(w - 2I_E) = \text{Vect}(f_1 + f_3).$$

14. Soient $x \in \mathbb{C}^*$ et $c = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\mathcal{B}_v = (a, b, c)$. On a

$$\begin{aligned} \text{rg}(\mathcal{B}_v) &= \text{rg} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \text{rg} \begin{pmatrix} 3 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} x & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & C_1 \leftrightarrow C_3 \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{x} & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} & C_2 \leftrightarrow C_3. \end{aligned}$$

Puisque $x \neq 0$, on a bien 3 pivots, donc $\text{rg}(\mathcal{B}_v) = 3 = \dim(E) = \text{Card}(\mathcal{B}_v)$. Donc $\mathcal{B}_v$ est libre et génératrice. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{B}_v = (a, b, c) \text{ est une base de } \mathbb{C}^3.}$$

15. Puisque v est associé à B dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$, on a

$$\text{Ker}(v - 2\text{Id}_{\mathbb{C}^3}) = \text{Ker}(B - 2I_3) = \text{Vect}(a, b).$$

Donc $a \in \text{Ker}(v - 2\text{Id}_{\mathbb{C}^3})$ i.e.

$$(v - 2\text{Id}_{\mathbb{C}^3})(a) = 0_{\mathbb{C}^3} \quad \Leftrightarrow \quad v(a) - 2a = 0_{\mathbb{C}^3} \quad \Leftrightarrow \quad v(a) = 2a.$$

De même, $v(b) = 2b$. Enfin, on cherche x et donc c tel que $v(c) = 2c + b$ i.e.

$$\begin{aligned} B \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= 2 \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} 3x \\ 0 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} 3x = 2x+1 \\ x = 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow & x = 1. \end{aligned}$$

Posons $x = 1$ et donc $c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Alors, par les équivalences précédentes, on a $v(c) = 2c + b$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Si } x = 1, \text{ alors } \text{mat}_{\mathcal{B}_v}(v) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Partie 3 : Diagonalisation de A

On pose $e_1 = f_1 - f_3$, $e_2 = f_2 - f_3$, $e_3 = f_1 + f_2 + f_3$, $\mathcal{B}_u = (e_1, e_2, e_3)$ et enfin $P = \text{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}_u)$.

16. Par définition de P et de $\mathcal{B}_u$, on a directement,

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

17. Par opération élémentaire, on a

$$\text{rg}(P) = \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow \frac{L_1 + L_2 + L_3}{3}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{rg}(P) = 3.}$$

18. Puisque $\text{rg}(P) = 3$, on en déduit que $P = \text{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}_u)$ est une matrice inversible. Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{B}_u \text{ est une base de } E.}$$

19. On a $X = \text{mat}_{\mathcal{C}}(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $A = \text{mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc

$$Y = \text{mat}_{\mathcal{C}}(u(e_1)) = AX = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = X.$$

Donc $u(e_1) = e_1$. De même,

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(u(e_2)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \text{mat}_{\mathcal{C}}(e_2).$$

Donc $u(e_2) = e_2$. Enfin,

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}(u(e_3)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = -2\text{mat}_{\mathcal{C}}(e_3).$$

Donc $u(e_3) = -2e_3$. Conclusion,

$$\boxed{u(\mathcal{B}_u) = (e_1, e_2, -2e_3).}$$

20. Directement, par la question précédente, on a

$$\boxed{D = \text{mat}_{\mathcal{B}_u}(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

21. Par la formule de changement de base, on a

$$\boxed{A = PDP^{-1} \text{ ou encore } D = P^{-1}AP.}$$

22. On a les égalités dans E suivantes :

$$\frac{2e_1 - e_2 + e_3}{3} = \frac{2f_1 - 2f_3 - f_2 + f_3 + f_1 + f_2 + f_3}{3} = f_1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\frac{2e_1 - e_2 + e_3}{3} = f_1.}$$

23. Par la question précédente, on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_u}(f_1) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_u}(u^n(f_1)) = \text{mat}_{\mathcal{B}_u}(u^n) \text{mat}_{\mathcal{B}_u}(f_1) = D^n \text{mat}_{\mathcal{B}_u}(f_1).$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ (y compris $n = 0$), on a par récurrence,

$$D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{bmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_u}(u^n(f_1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ (-2)^n \end{bmatrix}.$$

Or en posant $X' = \text{mat}_{\mathcal{B}_u}(u^n(f_1))$ et $X = \text{mat}_{\mathcal{C}}(u^n(f_1))$, on sait que

$$X = PX' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ (-2)^n \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 + (-2)^n \\ -1 + (-2)^n \\ -1 + (-2)^n \end{bmatrix}.$$

Finalement en repassant dans E , on obtient alors,

$$\begin{aligned} u^n(f_1) &= \frac{(2 + (-2)^n)f_1 + (-1 + (-2)^n)f_2 + (-1 + (-2)^n)f_3}{3} \\ &= \frac{(3 - 1 + (-2)^n)f_1 + (-1 + (-2)^n)f_2 + (-1 + (-2)^n)f_3}{3} \\ &= f_1 + \frac{(-2)^n - 1}{3}(f_1 + f_2 + f_3). \end{aligned}$$

Donc en posant $\lambda = 1$ et $\mu_n = \frac{(-2)^n - 1}{3}$, on obtient bien le résultat souhaité. Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u^n(f_1) = f_1 + \frac{(-2)^n - 1}{3}(f_1 + f_2 + f_3).}$$

Partie 4 : Vecteurs propres de A et de B

On considère les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_A &= \{ X \in \mathbb{C}^3 \mid \exists \lambda \in \mathbb{C}, AX = \lambda X \} \\ \mathcal{E}_B &= \{ X \in \mathbb{C}^3 \mid \exists \mu \in \mathbb{C}, BX = \mu X \} \end{aligned}$$

24. Soit $X \in \mathbb{C}^3$. On a

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{E}_B &\Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{C}, BX = \mu X \\ &\Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{C}, (B - \mu I_3)X = 0_{\mathbb{C}^3} \\ &\Leftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{C}, X \in \text{Ker}(B - \mu I_3). \end{aligned}$$

Premier cas, $\mu \neq 2$ et donc par la question 11. $X \in \text{Ker}(B - \mu I_3) = \{0_{\mathbb{C}^3}\}$. Deuxième cas, $\mu = 2$ et donc $X \in \text{Ker}(B - 2I_3)$. Donc

$$X \in \mathcal{E}_B \Leftrightarrow X = 0_{\mathbb{C}^3} \text{ OU } X \in \text{Ker}(B - 2I_3).$$

Or $0_{\mathbb{C}^3} \in \text{Ker}(B - 2I_3)$. Finalement,

$$X \in \mathcal{E}_B \Leftrightarrow X \in \text{Ker}(B - 2I_3).$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{E}_B = \text{Ker}(B - 2I_3)}.$$

25. Soient $X \in \mathbb{C}^3$ et $Y = \text{mat}_{\mathcal{B}_u}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Rappelons que $D = \text{mat}_{\mathcal{B}_u}(u)$, $A = \text{mat}_{\mathcal{C}}(u)$, $P = \text{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}_u)$ et $A = PDP^{-1}$. Donc on a $X = PY$. Dès lors,

$$\begin{aligned} X \in \text{Ker}(A - \lambda I_3) &\Leftrightarrow AX = \lambda X \\ &\Leftrightarrow PDP^{-1}PY = \lambda PY \\ &\Leftrightarrow PDY = P(\lambda Y) \\ &\Leftrightarrow DY = \lambda Y \quad \text{car } P \text{ est inversible} \\ &\Leftrightarrow Y \in \text{Ker}(D - \lambda I_3). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{X \in \text{Ker}(A - \lambda I_3) \Leftrightarrow Y \in \text{Ker}(D - \lambda I_3)}.$$

26. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

$$D - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1; -2\}$. Alors, $1 - \lambda \neq 0$, $-2 - \lambda \neq 0$ et donc $\text{rg}(D - \lambda I_3) = 3$ i.e. $D - \lambda I_3$ est inversible et donc $\text{Ker}(D - \lambda I_3) = \{0_{\mathbb{C}^3}\}$. Or, pour $X \in \mathbb{C}^3$, on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{E}_A &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^3, X \in \text{Ker}(A - \lambda I_3) \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^3, Y \in \text{Ker}(D - \lambda I_3) \quad \text{par la question précédente} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^3, Y \in \text{Ker}(D - \lambda I_3) = \{0_{\mathbb{C}^3}\} \\ &\quad \text{OU } Y \in \text{Ker}(D - I_3) \text{ OU } Y \in \text{Ker}(D + 2I_3) \\ &\Leftrightarrow Y \in \{0_{\mathbb{C}^3}\} \text{ OU } Y \in \text{Ker}(D - I_3) \cup \text{Ker}(D + 2I_3). \end{aligned}$$

Or $\{0_{\mathbb{C}^3}\} \subset \text{Ker}(D - I_3) \cup \text{Ker}(D + 2I_3)$. Donc,

$$X \in \mathcal{E}_A \Leftrightarrow Y \in \text{Ker}(D - I_3) \cup \text{Ker}(D + 2I_3).$$

En raisonnant comme à la question précédente, on a $Y \in \text{Ker}(D - I_3) \cup \text{Ker}(D + 2I_3) \Leftrightarrow X \in \text{Ker}(A - I_3) \cup \text{Ker}(A + 2I_3)$. D'où,

$$X \in \mathcal{E}_A \Leftrightarrow X \in \text{Ker}(A - I_3) \cup \text{Ker}(A + 2I_3).$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathcal{E}_A = \text{Ker}(A - I_3) \cup \text{Ker}(A + 2I_3)}.$$

Problème II - Analyse (d'après banque PT 2015)

Les questions avec un astérisque ont été modifiées par rapport au sujet initial.

Partie 1 : Fonctions et encadrements

Soit n un entier naturel non nul. On considère les fonctions f_n et g_n définies, pour tout réel x , par

$$f_n(x) = e^{\frac{x^2}{n}} - \frac{x^2}{n} - 1 \quad \text{et} \quad g_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}} + \frac{x^2}{n} - 1.$$

1. Etudions la parité de f_n et g_n et déduisons-en un domaine d'étude de ces fonctions.

Les fonctions f_n et g_n sont bien définies sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions qui le sont. L'ensemble $\mathbb{R}$ est bien centré en 0 et de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_n(-x) &= e^{\frac{(-x)^2}{n}} - \frac{(-x)^2}{n} - 1 = e^{\frac{x^2}{n}} - \frac{x^2}{n} - 1 = f_n(x) \\ g_n(-x) &= e^{-\frac{(-x)^2}{n}} + \frac{(-x)^2}{n} - 1 = e^{-\frac{x^2}{n}} + \frac{x^2}{n} - 1 = g_n(x), \end{aligned}$$

par parité de la fonction carrée. Conclusion,

les fonctions f_n et g_n sont paires, il suffit donc de les étudier sur $\mathbb{R}_+$.

2. On souhaite ici tracer les courbes représentatives des fonctions f_1 et g_1 sur un même graphe.

- (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimons $f_1(x) - g_1(x)$ à l'aide de la fonction sinus hyperbolique. Par définition, on a

$$\begin{aligned} f_1(x) - g_1(x) &= e^{x^2} - x^2 - 1 - (e^{-x^2} + x^2 - 1) \\ &= e^{x^2} - e^{-x^2} - 2x^2 \\ &= 2 \operatorname{sh}(x^2) - 2x^2. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) - g_1(x) = 2 \operatorname{sh}(x^2) - 2x^2.$$

- (b) Montrons que pour tout réel $t \geq 0$, $\operatorname{sh}(t) \geq t$ et montrons que $f_1(x) \geq g_1(x)$ pour tout $x \geq 0$. Posons pour tout $t \geq 0$, $h(t) = \operatorname{sh}(t) - t$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h'(t) = \operatorname{ch}(t) - 1 \geq 0.$$

Donc la fonction h est croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad h(t) \geq h(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sh}(t) \geq t.$$

Conclusion,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \operatorname{sh}(t) \geq t.$$

Soit $x \geq 0$. Posons $t = x^2$. Puisque $t \geq 0$,

$$\operatorname{sh}(x^2) \geq x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sh}(x^2) - x^2 \geq 0.$$

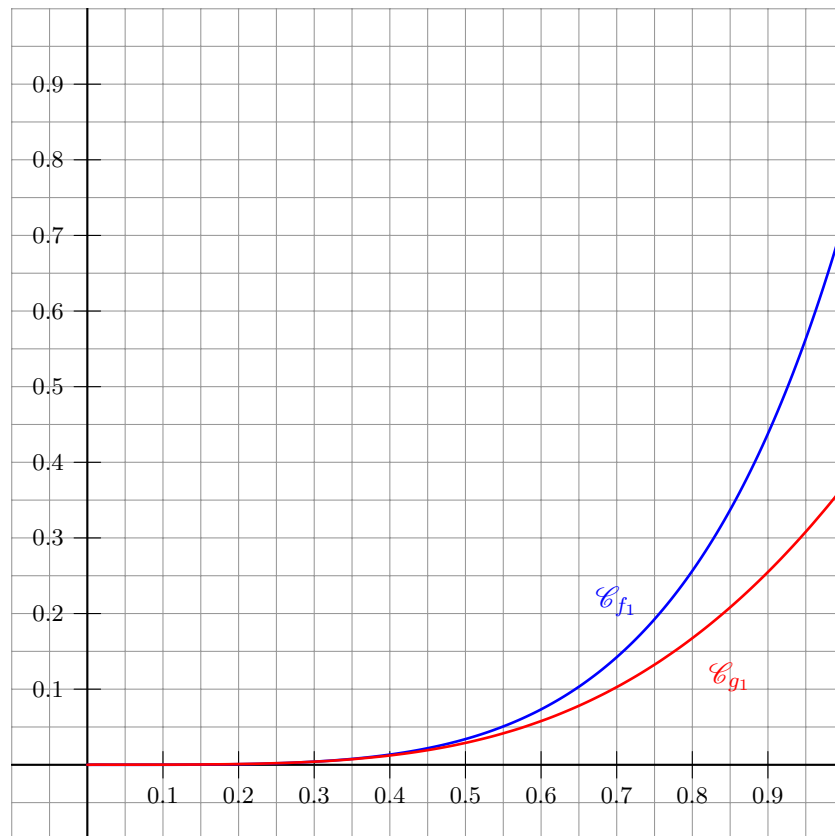
Donc par la question précédente,

$$f_1(x) - g_1(x) = 2(\operatorname{sh}(x^2) - x^2) \geq 0.$$

Conclusion,

$$\forall x \geq 0, \quad f_1(x) \geq g_1(x).$$

- (c) On note que $f_1(0) = 1 - 0 - 1 = 0$, $g_1(0) = 1 + 0 - 1 = 0$, $f_1(1) = e - 2 \in]0; 1[$ et $g_1(1) = e^{-1} \in]0; 1[$. On obtient alors,



3. On suppose $n \geq 2$.

- (a) Calculons, pour tout réel x , $f'_n(x)$ et $g'_n(x)$. Les fonctions f_n et g_n sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que différences et composée de fonctions qui le sont. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'_n(x) = \frac{2x}{n} e^{\frac{x^2}{n}} - \frac{2x}{n} = \frac{2x}{n} \left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1 \right)$$

$$g'_n(x) = -\frac{2x}{n} e^{-\frac{x^2}{n}} + \frac{2x}{n} = \frac{2x}{n} \left(1 - e^{-\frac{x^2}{n}} \right).$$

Conclusion,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_n(x) = \frac{2x}{n} \left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1 \right) \text{ et } g'_n(x) = \frac{2x}{n} \left(1 - e^{-\frac{x^2}{n}} \right).$$

- (b) Etudions les variations de f_n et g_n sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par la question précédente,

$$\begin{aligned} f'_n(x) \geq 0 & \Leftrightarrow e^{\frac{x^2}{n}} - 1 \geq 0 \quad \text{car } x \geq 0 \\ & \Leftrightarrow e^{\frac{x^2}{n}} \geq 1 \\ & \Leftrightarrow \frac{x^2}{n} \geq 0 \text{ toujours vrai.} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} g'_n(x) \geq 0 & \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{x^2}{n}} \geq 0 \quad \text{car } x \geq 0 \\ & \Leftrightarrow 1 \geq e^{-\frac{x^2}{n}} \\ & \Leftrightarrow 0 \geq -\frac{x^2}{n} \text{ toujours vrai.} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\text{les fonctions } f_n \text{ et } g_n \text{ sont croissantes sur } \mathbb{R}_+.$$

(c) Montrons que, pour tout réel positif : $f_n(x) \geq 0$ et $g_n(x) \geq 0$. Par la question précédente,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) \geq f_n(0) = 0 \text{ et } g_n(x) \geq g_n(0) = 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) \geq 0 \text{ et } g_n(x) \geq 0.}$$

(d) Montrons que pour tout réel x de l'intervalle $[0; \sqrt{n}]$, $\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$. Soit $x \in [0; \sqrt{n}] \subset \mathbb{R}_+$. Par la question précédente,

$$\begin{aligned} f_n(x) \geq 0 & \Leftrightarrow e^{\frac{x^2}{n}} - \frac{x^2}{n} - 1 \geq 0 \\ & \Leftrightarrow e^{\frac{x^2}{n}} \geq \frac{x^2}{n} + 1 \\ & \Leftrightarrow e^{-x^2} \geq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}, \end{aligned}$$

par décroissance de la fonction $x \mapsto x^{-n}$ sur $\mathbb{R}_+$. D'autre part,

$$\begin{aligned} g_n(x) \geq 0 & \Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{n}} + \frac{x^2}{n} - 1 \geq 0 \\ & \Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{n}} \geq 1 - \frac{x^2}{n}. \end{aligned}$$

Or $x \leq \sqrt{n}$ donc $x^2 \leq n$ et donc $1 - \frac{x^2}{n} \geq 0$. Par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $e^{-x^2} \geq \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$. Conclusion,

$$\boxed{\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

On note que l'hypothèse $x \leq \sqrt{n}$ n'a été utile dans le raisonnement que pour l'inégalité inférieure,

$$\boxed{\text{l'inégalité de droite est donc encore vraie sur } \mathbb{R}_+}.$$

(e) Dans cette question, on suppose x fixé dans $\mathbb{R}_+$.

Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)}.$$

Or $\ln(1 + u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u + o(u)$. Posons $u(n) = -\frac{x^2}{n}$. On a

- $u(n) = -\frac{x^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,
- et

$$o(u(n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} e^{n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)} & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{n\left(-\frac{x^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{-x^2 + o(1)} \\ & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{-x^2} e^{o(1)} \\ & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{-x^2} (1 + o(1)) \\ & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{-x^2} + o(1). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = e^{-x^2}.$$

De même,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} &= e^{-n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)} \\ &= e^{-n\left(\frac{x^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ &= e^{-x^2 + o(1)}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} = e^{-x^2}.$$

(f) Montrons que pour tout réel positif x : $\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \leq \frac{1}{1+x^2}$. Pour tout $x \geq 0$, posons

$$h(x) = \frac{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}{1 + x^2}.$$

Pour tout $x \geq 0$, $1 + x^2 \geq 1 > 0$. Donc par quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{n \frac{2x}{n} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{n-1} (1 + x^2) - 2x \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{2x \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{n-1} \left(1 + x^2 - \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)\right)}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{2x \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{n-1} \left(x^2 - \frac{x^2}{n}\right)}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{2x^3 \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{(1 + x^2)^2}. \end{aligned}$$

Puisque $n \geq 1$, $1 - \frac{1}{n} \geq 0$. De plus, $2x^3 \geq 0$, $\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{n-1} \geq 0$ et $(1 + x^2)^2 \geq 0$. Par produit et quotient,

$$\forall x \geq 0, \quad h'(x) \geq 0.$$

Donc la fonction h est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc

$$\forall x \geq 0, \quad h(x) \geq h(0) = 1.$$

D'où,

$$\forall x \geq 0, \quad \frac{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}{1 + x^2} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \geq 0, \quad \frac{1}{1 + x^2} \geq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n},$$

car $\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n > 0$. Conclusion,

$$\forall x \geq 0, \quad \frac{1}{1 + x^2} \geq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

- (g) Montrons que $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ existe et calculons sa valeur. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 \geq 1 > 0$. Donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0; 1]$. Par conséquent,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \text{ existe.}$$

De plus,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan(t)]_{t=0}^{t=1} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0.$$

Conclusion,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

- (h) Montrons que $\int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \frac{\pi}{4}$. Par la question 3.f

$$\forall x \geq 0, \quad \frac{1}{1+x^2} \geq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

Donc par la question 3.d

$$\forall x \geq 0, \quad e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Donc par croissance de l'intégrale, car les bornes sont dans le bon sens,

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Conclusion, par la question précédente,

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \frac{\pi}{4}.$$

Partie 2 : Intégration, équation différentielle

Pour tout réel $t \geq 0$, on pose

$$h(t) = \int_0^1 \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx.$$

4. Montrons que h est bien définie sur $\mathbb{R}_+$. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. La fonction $x \mapsto \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}$ est continue sur $[0; 1]$ comme quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc $h(t) = \int_0^1 \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$ existe. Ceci étant vrai pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on en conclut que

$$h \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+.$$

5. Calculons $h(0)$. On a

$$h(0) = \int_0^1 \frac{e^{-0}}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Donc par la question 3.g

$$h(0) = \frac{\pi}{4}.$$

6. Montrons que h est monotone sur $\mathbb{R}_+$, et que, pour tout réel positif, $0 \leq h(t) \leq \frac{\pi}{4}$. Soit $(t, s) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Supposons $t \leq s$. Alors, pour tout $x \in [0; 1]$,

$$-tx^2 \geq -sx^2.$$

Par croissance de la fonction exponentielle,

$$e^{-tx^2} \geq e^{-sx^2}.$$

Puisque $1 + x^2 > 0$, on obtient,

$$\forall x \in [0; 1], \quad \frac{e^{-tx^2}}{1 + x^2} \geq \frac{e^{-sx^2}}{1 + x^2}.$$

Donc par croissance de l'intégrale, car les bornes sont dans le bon sens,

$$\int_0^1 \frac{e^{-tx^2}}{1 + x^2} dx \geq \int_0^1 \frac{e^{-sx^2}}{1 + x^2} dx \quad \Leftrightarrow \quad h(t) \geq h(s).$$

Ceci étant vrai pour tout $0 \leq t \leq s$, on en conclut que

la fonction h est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

En particulier,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad h(t) \geq h(0) = \frac{\pi}{4} \quad \text{par la question précédente.}$$

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\forall x \in [0; 1], \quad \frac{e^{-tx^2}}{1 + x^2} \geq 0.$$

Donc par croissance de l'intégrale,

$$h(t) \geq 0.$$

Conclusion,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq h(t) \leq \frac{\pi}{4}.$$

On pose pour tout réel t positif,

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} \int_0^t e^{-x^2} dx & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

7. Montrons que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc par le théorème fondamentale de l'analyse,

$$F : t \mapsto \int_0^t e^{-x^2} dx,$$

est bien définie et même $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et est une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$. Pour tout $t > 0$,

$$\varphi(t) = \frac{F(t)}{t}.$$

Comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{F(t)}{t} &= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{F(t) - F(0)}{t - 0} && \text{car } F(0) = \int_0^0 e^{-x^2} dx = 0 \\ &= F'(0) \text{ car } F \text{ est dérivable en } 0 \\ &= e^{-0^2} = 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \varphi(t) = \varphi(0).$$

D'où φ est aussi continue en 0. Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}.$$

8. Montrons que pour tout réel positif t , $\varphi(\sqrt{t}) = \int_0^1 e^{-tx^2} dx$. Soit $t \geq 0$. Premier cas, $t > 0$, alors

$$\varphi(\sqrt{t}) = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2} dx.$$

Posons $y = \frac{x}{\sqrt{t}}$ i.e. $x = \sqrt{t}y$ car $t > 0$. Si $x = 0$, $y = 0$ et si $x = \sqrt{t}$, $y = 1$. De plus, la fonction $y \mapsto \sqrt{t}y$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ et $dx = \sqrt{t} dy$. D'où

$$\begin{aligned} \varphi(\sqrt{t}) &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^1 e^{-(\sqrt{t}y)^2} \sqrt{t} dy \\ &= \int_0^1 e^{-ty^2} dy. \end{aligned}$$

La variable d'intégration étant muette, on en déduit que

$$\forall t > 0, \quad \varphi(\sqrt{t}) = \int_0^1 e^{-tx^2} dx.$$

Puis pour $t = 0$,

$$\varphi(\sqrt{0}) = \varphi(0) = 1 \quad \text{par définition}$$

et

$$\int_0^1 e^{-0 \times x^2} dx = \int_0^1 1 dx = 1.$$

Donc l'égalité reste vraie pour $t = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(\sqrt{t}) = \int_0^1 e^{-tx^2} dx.}$$

9. On admet que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tout réel positif t ,

$$h'(t) = \int_0^1 \frac{-x^2}{1+x^2} e^{-tx^2} dx.$$

Montrons que h vérifie pour tout réel positif t , l'équation différentielle $(\mathcal{E})$

$$h'(t) - h(t) = -\varphi(\sqrt{t}).$$

On a pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} h'(t) - h(t) &= \int_0^1 \frac{-x^2}{1+x^2} e^{-tx^2} dx - \int_0^1 \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{-x^2 - 1}{1+x^2} e^{-tx^2} dx \\ &= - \int_0^1 e^{-tx^2} dx. \end{aligned}$$

Par la question précédente, on en conclut que h vérifie

$$\boxed{(\mathcal{E}) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad h'(t) - h(t) = -\varphi(\sqrt{t}).}$$

10. Donnons la solution générale, sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$ associée à $(\mathcal{E})$. On a

$$(E_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad h'(t) - h(t) = 0.$$

Posons $a : t \mapsto -1$. La fonction a est continue sur $\mathbb{R}_+$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}_+$ dont l'une est donnée par $A : t \mapsto -t$. Conclusion, l'ensemble des solutions de (E_0) est donné par

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto K e^t \end{array} \mid K \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^t \end{array} \right).$$

Partie 3 : Série - approche numérique d'une intégrale

11. Etudions la convergence de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq |u_n| = \frac{1}{n!(2n+1)} \leq \frac{1}{n!}.$$

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!}$ converge en tant que série exponentielle de paramètre $x = 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \text{ converge.}$$

Autrement dit, $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence.

Conclusion,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} \text{ converge.}$$

12. Pour tout réel t , montrons la convergence et calculons la somme totale de la série de terme général $\frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}$, on a alors

$$v_n = \frac{(-t^2)^n}{n!},$$

on reconnaît alors le terme général d'une série exponentielle de paramètre $x = -t^2$. Par conséquent,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} \text{ converge.}$$

De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} = e^{-t^2}.$$

13. A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle, montrons que pour tout réel t entre 0 et 1 et tout entier naturel n ,

$$\left| e^{-t^2} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} \right| \leq \frac{t^{2n+2}}{(n+1)!}.$$

Soit $t \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Posons $x = -t^2$. La fonction $f : s \mapsto e^s$ est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0; x]$. Donc par la formule de Taylor-Lagrange,

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k \right| \leq \sup_{z \in [x; 0]} |f^{(n+1)}(z)| \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Or pour tout $k \in \llbracket 0; n+1 \rrbracket$, $f^{(k)} = f$ et donc $f^{(k)}(0) = 1$ et par croissance de la fonction exponentielle,

$$\sup_{z \in [x; 0]} |f^{(n)}(z)| = \sup_{z \in [-t^2; 0]} e^z = 1.$$

D'où

$$\left| e^{-t^2} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (-t^2)^k \right| \leq \frac{|-t^2|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Conclusion,

$$\left| e^{-t^2} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} \right| \leq \frac{t^{2n+2}}{(n+1)!}.$$

14. Montrons que pour tout entier naturel n , $\left| \int_0^1 e^{-x^2} dx - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!(2n+3)}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente et la croissance de l'intégrale, car les bornes sont dans le bon sens,

$$\int_0^1 \left| e^{-t^2} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} \right| dt \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{(n+1)!} dt.$$

Donc par l'inégalité triangulaire,

$$\left| \int_0^1 e^{-t^2} dt - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{(n+1)!} dt.$$

D'une part, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-t^2} dt - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} dt &= \int_0^1 e^{-t^2} dt - \sum_{k=0}^n \int_0^1 \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} dt \\ &= \int_0^1 e^{-t^2} dt - \sum_{k=0}^n \left[\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{k!(2k+1)} \right]_{t=0}^{t=1} \\ &= \int_0^1 e^{-t^2} dt - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{(n+1)!} dt = \left[\frac{t^{2n+3}}{(n+1)!(2n+3)} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{(n+1)!(2n+3)}.$$

Conclusion,

$$\left| \int_0^1 e^{-x^2} dx - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!(2n+3)}.$$

15. Montrons que $\int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}$. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)!(2n+3)} = 0.$$

Donc par la question précédente et le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_0^1 e^{-x^2} dx - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} \right| = 0$$

ou encore

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 e^{-x^2} dx - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! (2k+1)} \right) = 0$$

mais aussi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! (2k+1)} = \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

Conclusion,

$$\boxed{\int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! (2k+1)}}.$$

16. Donnons un nombre rationnel r qui soit une valeur numérique approchée de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ à 10^{-3} près.
Par la question 14. pour que

$$\left| \int_0^1 e^{-x^2} dx - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! (2k+1)} \right| \leq 10^{-3},$$

il suffit de prendre $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{1}{(n+1)! (2n+3)} \leq 10^{-3} = \frac{1}{1000}.$$

Pour $n = 3$, on a

$$\frac{1}{(n+1)! (2n+3)} = \frac{1}{24 \times 9} = \frac{1}{216} > \frac{1}{1000}$$

pour $n = 4$,

$$\frac{1}{(n+1)! (2n+3)} = \frac{1}{120 \times 11} = \frac{1}{1320} < \frac{1}{1000}.$$

Donc pour $n = 4$, on a

$$\left| \int_0^1 e^{-x^2} dx - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! (2k+1)} \right| \leq 10^{-3}.$$

Ainsi, pour

$$r = \sum_{k=0}^4 \frac{(-1)^k}{k! (2k+1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{24 \times 9}.$$

on a r une approximation rationnelle de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ à 10^{-3} . Conclusion,

$$\boxed{r = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216}}.$$