

Commentaires du DS9-CCB

Représentation matricielle et analyse

La note finale s'obtient par la formule suivante $NF = \left(\frac{T_{total}}{70}\right)^{0,8} \times 20$.

	Soin	P1.1	P1.2	P1.3	P1.4	P1	P2.1	P2.2	P2.3	P2	Total	Note finale
Moyenne	-2,1	7	1,4	1,2	0	9,6	11	4,7	0,8	16,5	24	8,27
Sur		22	14	16	8	60	27	18	15	60	120	20

TOTAL : 120 pt

Problème I - Représentation matricielle **60 pt**

Partie 1 : Mise en place des matrices **22 pt**

On note j le complexe $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Dans le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, on définit les fonctions suivantes :

$$f_1 : \begin{matrix} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^x \end{matrix}, \quad f_2 : \begin{matrix} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{jx} \end{matrix}, \quad f_3 : \begin{matrix} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{j^2x} \end{matrix}.$$

On pose alors $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ et $E = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C})$. On note également

$$\tau : \begin{matrix} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & jx \end{matrix}.$$

Enfin pour tout $f \in E$, on pose $T(f) = f \circ \tau$.

1. (a) **2 pt** Soient $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$ tel que $x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})}$. Montrer que

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + jx_2 + j^2x_3 = 0 \\ x_1 + j^2x_2 + jx_3 = 0 \end{cases}$$

On pourra penser à dériver.

Aucune réponse complète. Plusieurs parviennent à dériver, attention à bien justifier votre dérivation et votre simplification de j^4 . Personne ne pense cependant à évaluer en 0 pour conclure. Quelques arnaques à la place...

- (b) **2 pt** Résoudre $(\mathcal{S})$.

Un peu calculatoire. Une seule bonne réponse. Beaucoup se dispersent dans du bricolage non fructueux. Un pivot est vital pour s'en sortir en justifiant bien les simplifications par $j^2 - 1 \neq 0$ par exemple.

2. **2 pt** Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de E en déduire la dimension de E .

Facile par ce qui précède. Plusieurs bonnes réponses mais tout le monde aurait dû avoir les points.

3. **2 pt** Montrer que $T(\mathcal{C}) = (f_2, f_3, f_1)$.

Assez bien dans l'ensemble mais attention aux confusions entre $f_1(x)$ et f_1 !!!! Ce n'est pas faute de l'avoir répété. Justifiez bien que $j^3 = 1$. Cela différencie les candidats qui se contentent de renvoyer le résultat donné dans le sujet et ceux qui savent réellement pourquoi le résultat est vrai.

4. **2 pt** Montrer que T est un endomorphisme de E .

Encore quelques étudiant(e)s en difficulté face à la linéarité, ce qui ne peut pas rester en l'état. Aucune bonne réponse concernant le fait que T est à valeurs dans E .

5. **2 pt** Montrer que $T \in \text{GL}(E)$.

Question pas très difficile mais une seule réponse et encore partielle.

6. **2 pt** Calculer $M = \text{mat}_{\mathcal{C}}(T)$.

Facile et bien réussie globalement. Passer à côté de cette question signifie clairement être passé complètement à côté du chapitre.

On pose $u = -T - T^2$, $A = \text{mat}_{\mathcal{C}}(u)$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

7. **2 pt** Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Beaucoup passent par l'endomorphisme, cela marche. On pouvait aussi faire comme dans le corrigé et passer par les matrices.

8. **2 pt** Préciser $u(f_1)$.

Question généreusement dotée, assez bien réussie mais malheureusement pas par tout le monde.

9. **2 pt** Préciser v l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à B .

Plusieurs bonnes réponses.

On note w l'endomorphisme de E tel que $B = \text{mat}_{\mathcal{C}}(w)$.

10. **2 pt** Soit $f \in E$ tel que $\text{mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. Déterminer $w(f)$.

Très peu de bonnes réponses alors que la question est à la fois facile et à la fois centrale dans ce chapitre. A bien retravailler!

Partie 2 : Trigonalisation de B 14 pt

On pose $a = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

11. 3 pt Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Déterminer suivant la valeur de λ , $\text{Ker}(B - \lambda I_3)$.

Question calculatoire, très peu réussie dans son intégralité. Il faut comprendre qu'il n'y a derrière que deux ingrédients : le pivot de Gauss et la discussion sur les valeurs du paramètre pour ne pas diviser par 0. A retravailler.

12. 3 pt Montrer que (a, b) est une base de $\text{Ker}(B - 2I_3)$. En déduire $\text{Ker}(w - 2\text{Id}_E)$.

Quelques bonnes réponses y compris parmi ceux qui n'ont pas réussi la question précédente. Une seule bonne réponse sur $\text{Ker}(w - 2\text{Id}_E)$ alors que cette partie est facile et fondamentale!

13. 3 pt Déterminer une base de $\text{Im}(B - 2I_3)$. En déduire $\text{Im}(w - 2I_E)$.

Idem.

14. 2 pt Soient $x \in \mathbb{C}^*$ et $c = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Montrer que $\mathcal{B}_v = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

Bien dans l'ensemble. Pensez bien à justifier dans votre raisonnement que $x \neq 0$ ce qui a été souvent le cas.

15. 3 pt Montrer qu'il existe une valeur de $x \in \mathbb{C}^*$ que l'on déterminera telle que

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_v}(v) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Une réponse partielle. Question là aussi très importante dans ce chapitre.

Partie 3 : Diagonalisation de A 16 pt

On pose $e_1 = f_1 - f_3$, $e_2 = f_2 - f_3$, $e_3 = f_1 + f_2 + f_3$, $\mathcal{B}_u = (e_1, e_2, e_3)$ et enfin $P = \text{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}_u)$.

16. 2 pt Calculer P .

Peu de bonnes réponses alors que la question est basique. A retravailler.

17. 2 pt Calculer $\text{rg}(P)$.

Quelques réponses cohérentes mais trop peu.

18. 2 pt Justifier que $\mathcal{B}_u$ est une base de E .

Facile avec la question précédente mais très peu traitée.

19. 2 pt Calculer $u(\mathcal{B}_u)$.

Peu traitée.

20. 2 pt En déduire D la matrice de u dans $\mathcal{B}_u$.

Peu traitée.

21. 2 pt Préciser sans calcul la relation entre A et D .

Un ou deux d'entre vous sont venus judicieusement récupérer les points ici, normal c'était du cours et donc des points gratuits.

22. **1 pt** Simplifier $\frac{2e_1 - e_2 + e_3}{3}$.

Facile et souvent traitée et réussie.

23. **3 pt** En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n(f_1) = \lambda f_1 + \mu_n(f_1 + f_2 + f_3)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante et $\mu_n \in \mathbb{R}$ un réel ne dépendant que de n que l'on précisera.

Non traitée.

Partie 4 : Vecteurs propres de A et B **8 pt**

On considère les ensembles suivants :

$$\mathcal{E}_A = \{X \in \mathbb{C}^3 \mid \exists \lambda \in \mathbb{C}, AX = \lambda X\}$$

$$\mathcal{E}_B = \{X \in \mathbb{C}^3 \mid \exists \mu \in \mathbb{C}, BX = \mu X\}$$

Partie non traitée.

24. **3 pt** Montrer que $\mathcal{E}_B = \text{Ker}(B - 2I_3)$.

25. **2 pt** Soient $X \in \mathbb{C}^3$ et $Y = \text{mat}_{\mathcal{B}_u}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$X \in \text{Ker}(A - \lambda I_3) \Leftrightarrow Y \in \text{Ker}(D - \lambda I_3).$$

26. **3 pt** En déduire que $\mathcal{E}_A = \text{Ker}(A - I_3) \cup \text{Ker}(A + 2I_3)$.

Problème II - Analyse (d'après banque PT 2015) **60 pt**

Les questions avec un astérisque ont été modifiées par rapport au sujet initial.

Partie 1 : Fonctions et encadrements **27 pt**

Soit n un entier naturel non nul. On considère les fonctions f_n et g_n définies, pour tout réel x , par

$$f_n(x) = e^{\frac{x^2}{n}} - \frac{x^2}{n} - 1 \quad \text{et} \quad g_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}} + \frac{x^2}{n} - 1.$$

1. **2 pt** Etudier la parité de f_n et g_n . En déduire un domaine d'étude de ces fonctions.

Bien dans l'ensemble. Plusieurs oublient encore de préciser que si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$. Pour le domaine d'étude, il ne fallait pas mettre $\mathbb{R}$ tout entier mais le réduire en conséquence à $\mathbb{R}_+$.

2. On souhaite ici tracer les courbes représentatives des fonctions f_1 et g_1 sur un même graphe.

- (a) **2 pt** Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f_1(x) - g_1(x)$ à l'aide de la fonction sinus hyperbolique.

Une bonne moitié de bonnes réponses. Pour les autres, j'ai vu des complexes, des termes qui disparaissent ou l'absence de connaissance de la fonction sh.

- (b) **2 pt** Montrer que pour tout réel $t \geq 0$,

$$\text{sh}(t) \geq t.$$

En déduire que $f_1(x) \geq g_1(x)$ pour tout $x \geq 0$.

Peu de bonnes réponses pour la première inégalité Quelques bricolages erronés ou non aboutis et beaucoup d'absence de réponses alors qu'il suffit d'étudier $h : t \mapsto \text{sh}(t) - t$. Question de niveau terminale... La seconde partie a été mieux réussie mais justifier bien l'application de $\text{sh}(t) \geq t$ avec quel t et en vérifiant bien que $t \geq 0$.

- (c) **2 pt** A l'aide de ces éléments, représenter sur un même graphe les courbes représentatives respectives des fonctions f_1 et g_1 sur $[0; 1]$ dans un repère orthonormé direct.

On prendra comme unité 10 cm.

Très peu de réponses alors que je donnais facilement 2 points si vous me traciez deux courbes très approximatives pourvu qu'elles démarrent à 0 et que celle de f soit sous celle de g . Quelques bonnes réponses malgré tout mais il est regrettable que beaucoup fasse une impasse directement.

3. On suppose $n \geq 2$.

- (a) **2 pt** Calculer, pour tout réel x , $f'_n(x)$ et $g'_n(x)$.
Basique... et pourtant trois d'entre vous ne savent pas dériver.
- (b) **2 pt** Etudier les variations de f_n et g_n sur $\mathbb{R}_+$.
Bien dans l'ensemble. Ne parachuterez pas le tableau. Les bornes n'étaient pas exigées mais vous avez été nombreux à les donner, cela facilitait la question suivante.
- (c) **2 pt** Montrer que, pour tout réel positif : $f_n(x) \geq 0$ et $g_n(x) \geq 0$.
Bien globalement.
- (d) **3 pt** En déduire, pour tout réel x de l'intervalle $[0; \sqrt{n}]$,

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

L'inégalité de droite est-elle encore vraie sur $\mathbb{R}_+$?

Globalement vous avez bien retrouvé ces inégalités mais vous n'avez pas justifié le fait de pouvoir passer à la puissance n ou pire à la puissance $-n$. Il fallait absolument parler de positivité des termes et ne pas oublier d'inverser l'inégalité en cas d'exposant négatif. Ce qui fait que personne n'a compris pourquoi celle de droite était encore vraie sur $\mathbb{R}_+$ alors que celle de gauche non, ce qui était nécessaire pour décrocher le troisième point.

- (e) **3 pt** Dans cette question, on suppose x fixé dans $\mathbb{R}_+$. Déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

Une seule bonne réponse. Plusieurs n'ont pas vu la correction et d'autres passent à la limite sur un seul morceau (d'abord à l'intérieur avant d'élever à la puissance n) ce qui ne marche pas.

- (f) **3 pt** Montrer que pour tout réel positif x :

$$\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \leq \frac{1}{1 + x^2}.$$

Aucune bonne réponse.

- (g) **2 pt** * Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ existe et calculer sa valeur.

Bien ! A part deux ou trois réfractaire à l'apprentissage du cours vous avez cette fois assimilé le mot magique de continuité. Attention cependant $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ est un nombre et en aucun cas une fonction ! Quelques-uns ne savent pas la valeur de $\arctan(1)$.

- (h) **2 pt** * En déduire que

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \frac{\pi}{4}.$$

Plusieurs bonnes réponses, sans difficulté.

Partie 2 : Intégration, équation différentielle 18 pt

Pour tout réel $t \geq 0$, on pose

$$h(t) = \int_0^1 \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx.$$

4. 2 pt * Montrer que h est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

Bien dans l'ensemble. Attention justement à bien spécifier la variable de $x \mapsto \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}$. Vu qu'il y a deux variables dire $\frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}$ continue prête fortement à confusion.

5. 2 pt Que vaut $h(0)$?

Une ou deux erreurs, bien sinon.

6. 4 pt Montrer que h est monotone sur $\mathbb{R}_+$, et en déduire que, pour tout réel positif,

$$0 \leq h(t) \leq \frac{\pi}{4}.$$

La monotonie est une question un peu plus subtile ici, il fallait revenir à la définition en montrant que $h(x) \geq h(y)$ pour $x \geq y$ et n'a pas été réussie. L'inégalité a marché dans l'ensemble. A rédiger en parlant de la croissance de l'intégrale.

On pose pour tout réel t positif,

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} \int_0^t e^{-x^2} dx & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

7. 3 pt * Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Aucune bonne réponse. Des forçages complètement aberrants. Du genre puisque $\varphi(0) = 1$ et que 1 est continue, alors φ est continue en 0. Cela signifierait que toute fonction définie est nécessairement continue. Il fallait invoquer le théorème fondamental de l'analyse et reconnaître un taux d'accroissement.

8. 3 pt * Montrer que pour tout réel positif t ,

$$\varphi(\sqrt{t}) = \int_0^1 e^{-tx^2} dx.$$

Bien pour ceux qui ont vu le changement de variable mais attention à traiter $t = 0$ à part !

9. 2 pt * On admet que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tout réel positif t ,

$$h'(t) = \int_0^1 \frac{-x^2}{1+x^2} e^{-tx^2} dx.$$

Montrer que h vérifie pour tout réel positif t , l'équation différentielle $(\mathcal{E})$

$$h'(t) - h(t) = -\varphi(\sqrt{t}).$$

Facile, pas mal de bonnes réponses.

10. 2 pt Donner la solution générale, sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$ associée à $(\mathcal{E})$.

Très basique et pourtant pas réussie pour tout le monde.

Partie 3 : Série - approche numérique d'une intégrale 15 pt

11. 2 pt Etudier la convergence de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$.
Plusieurs bricolages à partir de réflexes que vous utiliser sans les comprendre. Deux trois belles réponses.
12. 3 pt * Pour tout réel t , montrer la convergence et calculer la somme totale de la série de terme général $\frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}$.
Une ou deux bonnes réponses. On pouvait aussi faire le théorème de comparaison mais le plus rapide était de reconnaître une somme exponentielle (ce qui était nécessaire pour la somme totale).
13. 2 pt * A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle, montrer que pour tout réel t entre 0 et 1 et tout entier naturel n ,

$$\left| e^{-t^2} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} \right| \leq \frac{t^{2n+2}}{(n+1)!}.$$

Apparemment personne ne connaît vraiment son cours.

14. 3 pt * En déduire que pour tout entier naturel n ,

$$\left| \int_0^1 e^{-x^2} dx - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! (2k+1)} \right| \leq \frac{1}{(n+1)! (2n+3)}.$$

Non traitée.

15. 2 pt Montrer que

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! (2k+1)}.$$

Non traitée.

16. 2 pt Donner un nombre rationnel r qui soit une valeur numérique approchée de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ à 10^{-3} près (r pourra être laissé sous forme de somme de fractions : il n'est pas demandé d'exprimer r sous forme de fraction irréductible ni d'en donner une valeur numérique approchée).

Non traitée.