Correction de l'interrogation 10
Equations différentielles d'ordre 1

1. (a) Enoncer la proposition qui affirme que l'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel.
   Solution. L'ensemble $\mathscr{S}_0$ des solutions d'une équation homogène vérifie :
   - La fonction nulle est dans $\mathscr{S}_0$
   - Pour tout $(f,g) \in \mathscr{S}_0^2$ et tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, on a $\lambda f + \mu g \in \mathscr{S}_0$.

   (b) Définir un problème de Cauchy.
   Solution. Soient I un intervalle, a et b deux fonctions continues sur I, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ alors le problème suivant d'inconnue y une fonction dérivable sur I est un problème de Cauchy

$$(\mathscr{P}) \begin{cases} \forall t \in I,\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

   (c) Exprimer la partie réelle, la partie imaginaire et le module en fonction du conjugué.
   Solution. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}\,(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \qquad \text{et} \qquad |z|^2 = z\overline{z}.$$

2. Déterminer les intervalles de résolution puis $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E) : $\sqrt{1-x^2}\arcsin(x)y'(x) = y(x) + \arcsin(x)$, d'inconnue y une fonction dérivable.
   Solution. La fonction arcsin est définie, continue sur $[-1;1]$ et s'annule uniquement en 0. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$1 - x^2 \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 \leqslant 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in [-1;1]\,.$$

   De plus, $1 - x^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 1 \ \text{OU}\ x = -1$. Ainsi, la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}\arcsin(x)$ est continue et non nulle sur les intervalles :

$$\boxed{I_- = \,]-1;0[\qquad \text{ET} \qquad I_+ = \,]0;1[\,.}$$

   Soit $I = I_-$ ou $I = I_+$. Dès lors, l'équation devient

$$(E) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in I,\ y(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin(x)}y(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

   La fonction $a : x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin(x)} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin(x)}$ est donc continue sur I, admet donc des primitives sur I dont l'une est donnée par

$$A : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -\ln\left(|\arcsin(x)|\right). \end{array}$$

   Donc

$$\forall x \in I,\ \mathrm{e}^{-A(x)} = \mathrm{e}^{\ln(|\arcsin(x)|)} = abs\arcsin(x).$$

   Conclusion, l'ensemble des solutions de (E_0) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & K\,|\arcsin(x)| \end{array} \,\middle|\, K \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & K\arcsin(x) \end{array} \,\middle|\, K \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arcsin(x) \end{array} \right).}$$

3. Justifier que l'équation (E) : $y' - y = x^5\,\mathrm{e}^x$ admet des solutions sur $\mathbb{R}$ et les déterminer à l'aide de la méthode de variation de la constante.
   On pourra admettre que $y_0 : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est une solution de l'équation homogène associée.
   Solution. Les fonctions $a : x \mapsto -1$ et $b : x \mapsto x^5\,\mathrm{e}^x$ sont continues sur **l'intervalle** $\mathbb{R}$ donc

$$\boxed{(E) \text{ admet des solutions sur } \mathbb{R}.}$$

Soient y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda(x) = y(x)/y_0(x)$ (car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_0(x) \neq 0$). La fonction λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a les équivalences suivantes :

$$
\begin{aligned}
& y \text{ solution de } (E) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x)y_0(x) + \underbrace{\lambda(x)y_0'(x) - \lambda(x)y_0(x)}_{=0} = x^5 \,\mathrm{e}^x \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x)y_0(x) = x^5 \,\mathrm{e}^x \qquad \text{car } y_0 \text{ solution de l'équation homogène} \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x) \,\mathrm{e}^x = x^5 \,\mathrm{e}^x \\
\Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x) = x^5 \qquad \text{car } \mathrm{e}^x \neq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda(x) = \frac{x^6}{6} + K \\
\Leftrightarrow \quad & \exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \left(\frac{x^6}{6} + K\right) \mathrm{e}^x .
\end{aligned}
$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(\frac{x^6}{6} + K\right) \mathrm{e}^x \end{array} \middle| \, K \in \mathbb{R} \right\}.}$$

4. Justifier que $f : x \mapsto \frac{x+2}{x^2+3x+3}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et les déterminer.
Solution. Soit Δ le discriminant de $X^2 + 3X + 3$. On a $\Delta = 9 - 12 = -3 < 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 3x + 3 \neq 0$. Donc la fonction f est définie et même continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$. On pose $u : x \mapsto x^2 + 3x + 3$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u' : x \mapsto 2x + 3$. Dès lors, on observe que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x+2}{x^2+3x+3} = \frac{\frac{1}{2}(2x+3) + \frac{1}{2}}{x^2+3x+3} = \frac{u'(x)}{2u(x)} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+3x+3}.$$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x^2+3x+3}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3} = \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\frac{1}{1 + \left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\sqrt{3}/2}\right)^2} = \frac{4}{3}\frac{1}{1 + \left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

On note alors que $G : x \mapsto \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} \arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right)$ est une primitive de g. Donc une primitive de f est donnée par

$$F : \qquad x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(|u(x)|\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right).$$

Ainsi, l'ensemble des primitives de f est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(x^2+3x+3\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+3}{\sqrt{3}}\right) + K \end{array} \middle| \, K \in \mathbb{R} \right\}.}$$

5. Soit $I = \displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(t)} \,\mathrm{d}t$. Justifier que I existe et la calculer à l'aide du changement de variable $x = \cos(t)$.
Solution. Pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \sin(t) \leqslant 1$. En particulier $\sin(t) > 0$. Donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sin(t)}$ est continue sur le segment $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$. Donc $\boxed{I \text{ existe}}$. Posons $x = \cos(t)$. La fonction $t \mapsto \cos(t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ et

$\mathrm{d}x = -\sin(t)\,\mathrm{d}t$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2(t)}\,(-\sin(t))\,\mathrm{d}t \qquad\qquad \text{car } \sin(t) \neq 0 \\
&= -\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{1-\cos^2(t)}\,(-\sin(t))\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{1/2}^{0} \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x)(1+x)}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Or par le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}, \qquad f(x) = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}.$$

On a

$$a = \lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} (1-x)\,f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}.$$

De même,

$$b = \lim_{\substack{x\to -1\\ x\neq -1}} (1+x)\,f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x\neq -1}} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[-\ln(|1-x|) + \ln(|1+x|)\right]_{x=0}^{x=1/2} \\
&= \frac{1}{2}\left(-\ln(1/2) + \ln(3/2) + 0\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln(3).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\ln(3).}$$