Correction de l'interrogation 12
Calcul dans R et matrices

1. (a) Donner la définition de la borne inférieure, supérieure d'une partie.

   Solution. Soient $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a les définitions suivantes :

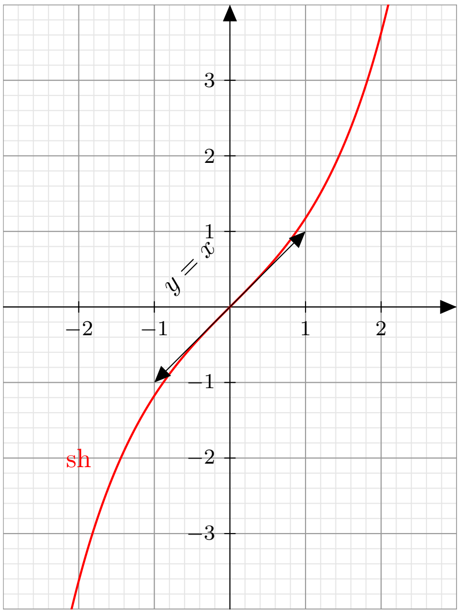
$$\begin{array}{rcl} a = \inf(A) & \Leftrightarrow & a = \max\{\, m \in \mathbb{R} \mid m \text{ minore } A \,\} \\ b = \sup(A) & \Leftrightarrow & b = \min\{\, M \in \mathbb{R} \mid M \text{ majore } A \,\}. \end{array}$$

   (b) Définir la partie entière.

   Solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$. Cet entier n est appelé partie entière de x : $n = \lfloor x \rfloor$.

   (c) Tracer le graphe de la fonction sinus hyperbolique y faire apparaitre les valeurs remarquables, les tangentes remarquables, les asymptotes remarquables.

   Solution.



2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,3]\!]^2$, $a_{i,j} = \frac{6i}{j}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Ecrire A et calculer AB.

   Solution. On obtient :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 12 & 6 & 4 \\ 18 & 9 & 6 \end{pmatrix}.}$$

   Puis

$$\boxed{AB = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 12 & 6 & 4 \\ 18 & 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I) : x + 3 > \sqrt{7x+15}$.

   Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$(I) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad 7x + 15 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant -\frac{15}{7}.$$

   Soit $x \in \left[-\frac{15}{7}; +\infty\right[$. Pour élever au carré, cherchons les valeurs de x pour lesquelles,

$$x + 3 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant -3 = -\frac{21}{7}.$$

Toujours vrai sur $\left[-\frac{15}{7};+\infty\right[$. Dès lors, on a

$$\begin{aligned}(I) \quad &\Leftrightarrow \quad x+3>\sqrt{7x+15}\\ &\Leftrightarrow \quad (x+3)^2>7x+15 \qquad \text{car } x\geqslant -\frac{15}{7} \text{ donc } 7x+15\geqslant 0 \text{ et } x+3\geqslant 0\\ &\Leftrightarrow \quad x^2+6x+9>7x+15\\ &\Leftrightarrow \quad x^2-x-6>0.\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé, $\Delta=1+24=25$. Donc les racines associées sont $\frac{1-5}{2}=-2$ et $\frac{1+5}{2}=3$. Ainsi,

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad x<-2 \text{ ou } x>3.$$

Or $-\frac{15}{7}<-\frac{14}{7}=-2$. Donc

$$\boxed{\mathscr{S}=\left[-\frac{15}{7};-2\right[\cup\left]3;+\infty\right[.}$$

4. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $A\subseteq B$. On suppose A non vide et B minorée. Montrer que la borne inférieure de A et la borne inférieure de B existent et que $\inf(A)\geqslant\inf(B)$.
Solution. Par hypothèse, l'ensemble B est minorée. De plus A est non vide, donc il existe $x\in A$. Or $A\subseteq B$, donc $x\in B$ et B est aussi non vide. Donc B est une partie non vide et minorée donc $\inf(B)$ existe. De plus pour tout $y\in B$, $\inf(B)\leqslant y$.
Soit $x\in A$. Puisque $A\subseteq B$, $x\in B$ et donc $\inf(B)\leqslant x$. Ceci étant vrai pour $x\in A$ quelconque, on en déduit que $\inf(B)$ minore A. Or par hypothèse A est non vide donc A admet une borne inférieure.
On a vu que $\inf(B)$ minore A donc par définition de la borne supérieure (le plus grand des majorants) on en déduit que $\inf(B)\leqslant\inf(A)$.
Conclusion, $\boxed{\inf(B) \text{ et } \inf(A) \text{ existent et de plus } \inf(B)\leqslant\inf(A).}$

5. Résoudre l'équation différentielle (E) : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ x^2y''(x)+3xy'(x)+y(x)=1$.
Indication, poser $x=\mathrm{e}^t$.
Solution. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons pour tout $t\in\mathbb{R}$, $z(t)=y\left(\mathrm{e}^t\right)$. Puisque pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^t\in\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que z est bien définie et même deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus on a $x=\mathrm{e}^t \Leftrightarrow t=\ln(x)$. Donc

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad & y(x)=z(\ln(x))\\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad & y'(x)=\frac{1}{x}z'(\ln(x))\\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad & y''(x)=-\frac{1}{x^2}z'(\ln(x))+\frac{1}{x^2}z''(\ln(x)).\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}y \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad x^2y''(x)+3xy'(x)+y(x)=1\\ &\Leftrightarrow \quad \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad -z'(\ln(x))+z''(\ln(x))+3z'(\ln(x))+z(\ln(x))=1\\ &\Leftrightarrow \quad \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad z''(\ln(x))+2z'(\ln(x))+z(\ln(x))=1\\ &\Leftrightarrow \quad \forall t\in\mathbb{R},\quad z''(t)+2z'(t)+z(t)=1 \qquad (F)\end{aligned}$$

L'équation caractéristique associée à (F) est $r^2+2r+1=0 \Leftrightarrow (r+1)^2=0 \Leftrightarrow r=-1$. Donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (F) est

$$\mathscr{S}_0=\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & (At+B)\,\mathrm{e}^{-t}\end{array}\ \middle|\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

De plus, on observe que $z_p : t\mapsto 1$ est une solution évidente de (F). Donc l'ensemble des solutions de (F) est

$$\mathscr{S}_F=\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & 1+(At+B)\,\mathrm{e}^{-t}\end{array}\ \middle|\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Dès lors, on a

$$\begin{aligned}y \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists(A,B)\in\mathbb{R}^2,\ \forall t\in\mathbb{R},\quad z(t)=1+(At+B)\,\mathrm{e}^{-t}\\ &\Leftrightarrow \quad \exists(A,B)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad y(x)=z(\ln(x))=1+(A\ln(x)+B)\,\mathrm{e}^{-\ln(x)}\\ &\Leftrightarrow \quad \exists(A,B)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad y(x)=1+\frac{A\ln(x)+B}{x}.\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 + \frac{A\ln(x)+B}{x} \end{array} \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$