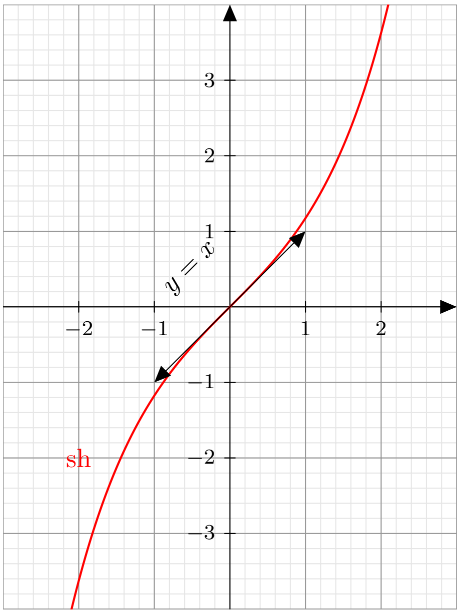
Réponses de l'interrogation 12
Calcul dans R et matrices

1. (a) Donner la définition de la borne inférieure, supérieure d'une partie.
Solution. Soient $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a les définitions suivantes :
$$\begin{aligned} a = \inf(A) &\quad\Leftrightarrow\quad a = \max\{\, m \in \mathbb{R} \mid m \text{ minore } A \,\} \\ b = \sup(A) &\quad\Leftrightarrow\quad b = \min\{\, M \in \mathbb{R} \mid M \text{ majore } A \,\}. \end{aligned}$$
(b) Définir la partie entière.
Solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$. Cet entier n est appelé partie entière de x : $n = \lfloor x \rfloor$.
(c) Tracer le graphe de la fonction sinus hyperbolique y faire apparaitre les valeurs remarquables, les tangentes remarquables, les asymptotes remarquables.
Solution.



2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,3]\!]^2$, $a_{i,j} = \frac{6i}{j}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Ecrire A et calculer AB.
Solution. On obtient :
$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 12 & 6 & 4 \\ 18 & 9 & 6 \end{pmatrix}.}$$
Puis
$$\boxed{AB = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 12 & 6 & 4 \\ 18 & 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $x + 3 > \sqrt{7x+15}$.
Solution. Donc
$$\boxed{\mathscr{S} = \left[-\frac{15}{7}; -2\right[\cup \,]3; +\infty[\,.}$$

4. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $A \subseteq B$. On suppose A non vide et B minorée. Montrer que la borne inférieure de A et la borne inférieure de B existent et que $\inf(A) \geqslant \inf(B)$.
Solution. Conclusion, $\boxed{\inf(B) \text{ et } \inf(A) \text{ existent et de plus } \inf(B) \leqslant \inf(A).}$

5. Résoudre l'équation différentielle $(E) : \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^2y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 1$.
   Indication, poser $x = \mathrm{e}^t$.
   Solution. Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 + \frac{A\ln(x)+B}{x} \end{array} \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$