Correction de l'interrogation 14
Analyse asymptotique I

1. (a) Enumérer les opérations qu'il est possible de faire sur les équivalents et celles que l'on sait fausses en général.
   Solution. Sur les équivalents, il est possible de
   - multiplier,
   - d'élever à la puissance (éventuellement négative et donc de passer à l'inverse),
   - de passer à la valeur absolue,
   - de faire un changement de variable.

   Il est cependant interdit
   - de sommer des équivalents,
   - de composer des équivalents par une fonction,
   - d'écrire équivalent à 0.

   (b) Enoncer le théorème d'encadrement des équivalents.
   Solution. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et $(f, g, h) \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})^3$ tels que
   $$\forall x \in I, \qquad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x).$$
   Alors, par le théorème d'encadrement des équivalents,
   $$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x).$$

   (c) Enoncer la séparation de l'intégrale.
   Solution. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$ et $f \in \mathscr{F}([a; b], \mathbb{R})$. On suppose que
   - La fonction f est continue sur $[a; b]$,
   - la fonction f est positive sur $[a; b]$,
   - $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$

   Alors pour tout $t \in [a; b]$, $f(t) = 0$.

2. Calculer un développement à l'ordre 2 en 0 de $f : x \mapsto \frac{1}{3+x} + \ln(3 + x)$.
   Solution. On a les égalités asymptotiques suivantes :
   $$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x}{3}} + \ln(3) + \ln\left(1 + \frac{x}{3}\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + o\left(x^2\right)\right) + \ln(3) + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{2\times 9} + o\left(x^2\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3} + \ln(3) + \frac{2x}{9} + \frac{(2-3)\,x^2}{2\times 3\times 9} + o\left(x^2\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3} + \ln(3) + \frac{2x}{9} - \frac{x^2}{54} + o\left(x^2\right). \end{aligned}$$
   Conclusion,
   $$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3} + \ln(3) + \frac{2x}{9} - \frac{x^2}{54} + o\left(x^2\right).}$$

3. Calculer le développement limité à l'ordre $2n + 1$ en $\frac{\pi}{3}$ de la fonction sinus.

Solution. Posons $h = x - \frac{\pi}{3}$ i.e. $x = \frac{\pi}{3} + h$. On a $h \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\longrightarrow} 0$. De plus,

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}+h\right)\\
&= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(h) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(h)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(h) + \frac{1}{2}\sin(h)\\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k h^{2k}}{(2k)!} + o\left(h^{2n+1}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k h^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(h^{2n+1}\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\sqrt{3}(-1)^k h^{2k}}{2(2k)!} + \frac{(-1)^k h^{2k+1}}{2(2k+1)!}\right) + o\left(h^{2n+1}\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sin(x) \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{=} \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\sqrt{3}(-1)^k \left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2k}}{2(2k)!} + \frac{(-1)^k \left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2k+1}}{2(2k+1)!}\right) + o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}\right).}$$

4. Par primitivation, déterminer le développement limité de la fonction arccos en 0 à l'ordre 5.
Solution. La fonction $f : x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $I =]-1\,;1[$, voisinage de 0, et de plus d'après le cours, f admet un développement limité à l'ordre 4 en 0 donné par

$$f(x) = -\left(1-x^2\right)^{-1/2} \underset{x\to 0}{=} -\left(1-(-1/2)x^2 + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2}\left(-x^2\right)^2 + o\left(x^4\right)\right) \underset{x\to 0}{=} -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{3x^4}{8} + o\left(x^4\right).$$

Enfin, on sait que arccos est une primitive de f. Donc par le théorème d'intégration des développements limités, on sait que arccos admet un développement limité à l'ordre 5 donné par

$$\arccos(x) \underset{x\to 0}{=} \arccos(0) - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + o\left(x^5\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\arccos(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + o\left(x^5\right).}$$

5. Soit $h : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{\sin(x)}{2}}$. Déterminer la tangente et la position relative de la courbe de h par rapport à sa tangente au voisinage de 0.
Solution. On sait que $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$ et de plus, $\mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o\left(u^3\right)$. Posons $u(x) = \frac{\sin(x)}{2}$. Alors, $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. De plus,
   - $u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)$
   - $u^2(x) \underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{4} + o\left(x^3\right)$
   - $u^3(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right)$
   - $o\left(u^3(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
h(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right) + \frac{x^2}{8} + o\left(x^3\right) + \frac{x^3}{48} + o\left(x^3\right) + o\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right).
\end{aligned}$$

Conclusion, la courbe de h admet pour tangente la droite d'équation

$$\boxed{y = 1 + \frac{x}{2}}$$

Et de plus, $h(x) - 1 + \frac{x}{2} \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{8} \geqslant 0$. Or deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré donc

$$\boxed{\text{la courbe de } h \text{ est au-dessus de sa tangente au voisinage de } 0.}$$