Correction de l'interrogation 17
Suites

1. (a) Donner une condition suffisante pour qu'une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ soit croissante et comment le démontre-t-on ?
   Solution. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que f est croissante et que $u_1 \geqslant u_0$. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On le démontre par récurrence bien sûr !

   (b) Donner la forme explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dans le cas où le discriminant est strictement négatif.
   Solution. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Soit Δ le discriminant de $(E_c) : r^2 - ar - b$. Si $\Delta < 0$, alors en notant $r_1 = r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}$ et $r_2 = r\,\mathrm{e}^{-i\,\theta}$ les deux racines complexes de (E_c),

   $$\exists\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = r^n\left(\lambda \cos(n\,\theta) + \mu \sin(n\,\theta)\right).$$

   (c) Définir la partie entière.
   Solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$. Cet entier n est appelé partie entière de x : $n = \lfloor x \rfloor$.

2. On considère la suite définie par récurrence par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35}$. On admet que la suite existe bien. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Que dire de ℓ ?
   Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on observe que $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35} \geqslant 0$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Donc $\ell \geqslant 0$. La fonction $x \mapsto \sqrt{2x+35}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc par passage à la limite,

   $$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35} \qquad &\Rightarrow \qquad \ell = \sqrt{2\ell + 35} \\ &\Rightarrow \qquad \ell^2 = 2\ell + 35 \\ &\Rightarrow \qquad \ell^2 - 2\ell - 35 = 0. \end{aligned}$$

   Soit Δ le discriminant associé. On a $\Delta = 4 + 4 \times 35 = 4 \times 36$. Donc $\ell = \frac{2+2\times 6}{2} = 1 + 6 = 7$ ou $\ell = 1 - 6 = -5$. Or $\ell \geqslant 0$. Conclusion,

   $$\boxed{\ell = 7.}$$

3. Donner une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 6$, $u_1 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
   Solution. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Soit $(E_c) : r^2 - 3r + 2 = 0$ son équation caractéristique. Son discriminant vaut $\Delta = 9 - 8 = 1$. Donc ses racines sont $r_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{3+1}{2} = 2$. Donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \lambda\,1^n + \mu 2^n = \lambda + \mu 2^n.$$

   Or $u_0 = 6$ et $u_1 = 7$ donc

   $$\begin{cases} \lambda + \mu = 6 \\ \lambda + \mu 2 = 7 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda + \mu = 6 \\ \mu = 1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 5 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 5 + 2^n.}$$

4. Développer $\sin(2a)$ pour $a \in \mathbb{R}$ et en déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1}\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$, avec $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
   Solution. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$u_n = 2^{n+1}\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = 2^{n+1}\sin\left(2\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = 2^{n+2}\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = u_{n+1}\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right).$$

Puisque $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{\theta}{2^{n+1}} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \in]0;1[$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n < u_{n+1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$$

5. On pose $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n \, \mathrm{e}^{u_n}}{3}$. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0;1]$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
Solution. On sait par hypothèse que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\mathrm{e}^{u_n}}{3}.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 1$ donc $1 < \mathrm{e}^{u_n} \leqslant \mathrm{e}$ par croissance de la fonction exponentielle. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{3} \leqslant 1.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} \leqslant u_n.$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée (par 0). Donc par le théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 1$, on note par passage à la limite que $0 \leqslant \ell \leqslant 1$. De plus, par continuité de la fonction $x \mapsto \frac{x \, \mathrm{e}^x}{3}$ sur $\mathbb{R}$, on a par caractérisation séquentielle de la continuité,

$$\frac{u_n \, \mathrm{e}^{u_n}}{3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell \, \mathrm{e}^{\ell}}{3}.$$

Donc par passage à la limite dans $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n \, \mathrm{e}^{u_n}}{3}$, on a

$$\ell = \frac{\ell \, \mathrm{e}^{\ell}}{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell = 0 \ \text{ OU } \ 1 = \frac{\mathrm{e}^{\ell}}{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell = 0 \ \text{ OU } \ \ell = \ln(3) > \ln(\mathrm{e}) = 1.$$

Or on a vu que $\ell \leqslant 1$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$$