Correction de l'interrogation 18
Polynômes

1. (a) Enoncer la formule de Leibniz pour les polynômes.
   Solution. Soient $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors
   $$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$
   (b) Enoncer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.
   Solution. Soit $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. Alors Il existe un unique couple $(Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que
   $$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B). \end{cases}$$
   (c) A l'aide des opérations élémentaires donner la caractérisation de l'inversibilité d'une matrice.
   Solution. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a
   $$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \Leftrightarrow \quad A \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_n \quad \Leftrightarrow \quad A \underset{\mathscr{C}}{\sim} I_n.$$

2. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P = \sum_{k=1}^{n} \frac{X^k}{k}$ et $Q = X^2 P'' + nP$. Déterminer en justifiant le degré de Q.
   Attention, il traine un cas particulier.
   Solution. Si $n \geqslant 2$, on a $P' = \sum_{k=1}^{n} X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$ puis $P'' = \sum_{k=2}^{n} (k-1) X^{k-2} = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) X^k$. Donc si $n \geqslant 2$,
   $$Q = \sum_{k=2}^{n} (k-1) X^k + n \sum_{k=1}^{n} \frac{X^k}{k}.$$
   Or $n-1+n\frac{1}{n} = n \neq 0$. Donc les coefficients dominants ne s'annulent pas et donc le degré de Q est bien n (et son coefficient dominant est n). Si $n=1$ cependant, $P = X$ et $P'' = 0$. Donc
   $$Q = nP = X.$$
   Conclusion, dans tous les cas,
   $$\boxed{\deg(Q) = \deg(P) = n.}$$
   (b) Soient $P = \frac{X^3}{3} + \frac{X^2}{2} + X$ et $Q = X+1$. Calculer $P \circ Q$ et $Q \circ P$ et préciser leurs degrés.
   Solution. On a $Q^2 = (X+1) = X^2 + 2X + 1$ et $Q^3 = (X+1)^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$. Donc
   $$P \circ Q = \frac{Q^3}{3} + \frac{Q^2}{2} + Q = \frac{X^3}{3} + X^2 + X + \frac{1}{3} + \frac{X^2}{2} + X + \frac{1}{2} + X + 1 = \frac{X^3}{3} + \frac{3}{2}X^2 + 3X + \frac{11}{6}.$$
   D'autre part,
   $$Q \circ P = P + 1 = \frac{X^3}{3} + \frac{X^2}{2} + X + 1.$$
   Conclusion,
   $$\boxed{P \circ Q = \frac{X^3}{3} + \frac{3}{2}X^2 + 3X + \frac{11}{6}, \qquad Q \circ P = \frac{X^3}{3} + \frac{X^2}{2} + X + 1, \qquad \deg(P \circ Q) = \deg(Q \circ P) = 3.}$$

3. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $(X+1)P' = 2P$.
   Solution. Soit $n = \deg(P)$. Premier cas, $n \leqslant 0$ i.e. $P = a \in \mathbb{R}$ alors $P' = 0$ et donc $(X+1)P' = 2P \Leftrightarrow P = 0$. Deuxième cas, $n \geqslant 1$. Dans ce cas, $\deg(P') = n-1$. Donc si $(X+1)P' = 2P$ alors
   $$\deg((X+1)P') = \deg(2P) \quad \Leftrightarrow \quad \deg(X+1) + \deg(P') = \deg(P) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + n - 1 = n.$$

Cela ne nous apporte aucune information.
Cherchons donc le coefficient dominant de P. Soit a_nX^n le terme dominant de P. Celui de P' est alors donné par na_nX^{n-1} donc celui de $(X+1)P'$ est na_nX^n tandis que celui de $2P$ est $2a_nX^n$. Ainsi,

$$na_nX^n = 2a_nX^n.$$

Puisque a_n est le coefficient dominant, $a_n \neq 0$. Donc $n=2$. Posons $P = a_2X^2 + a_1X + a_0$. Dès lors, on obtient les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} (X+1)P' = 2P \quad & \Leftrightarrow \quad (X+1)(2a_2X+a_1) = 2a_2X^2+2a_1X+2a_0 \\ & \Leftrightarrow \quad 2a_2X^2 + a_1X + 2a_2X + a_1 = 2a_2X^2+2a_1X+2a_0 \\ & \Leftrightarrow \quad 2a_2X^2 + (a_1+2a_2)X + a_1 = 2a_2X^2+2a_1X+2a_0. \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme,

$$\begin{cases} 2a_2 = 2a_2 \\ a_1 + 2a_2 = 2a_1 \\ a_1 = 2a_0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = 2a_2 = 2a_0.$$

Conclusion,

$$\mathscr{S} = \left\{ a_2X^2 + 2a_2X + a_2 \;\middle|\; a_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(X^2+2X+1\right) = \mathrm{Vect}\left((X+1)^2\right).$$

4. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^4 + 3X^3 - X^2 - 8X - 4$.
Solution. On remarque que -2 est une racine de P. En effet,

$$P(-2) = 16 - 24 - 4 + 16 - 4 = 0.$$

Donc $X+2$ factorise P. *Méthode 1, de tête :*

$$P = (X+2)\left(X^3 + X^2 - 3X - 2\right).$$

Méthode 2, la méthode de Horner :

	1	3	-1	-8	-4
-2	1	1	-3	-2	0

Donc $Q = X^3 + X^2 - 3X - 2$ et on a

$$P = (X+2)\left(X^3 + X^2 - 3X - 2\right).$$

Méthode 3, par l'algorithme de la division euclidienne,

$$\begin{array}{rrrrr|l} X^4 & +3X^3 & -X^2 & -8X & -4 & X \quad -1 \\ \cline{6-6} -(X^4 & +2X^3) & & & & X^3 \; +X^2 \; -3X \; -2 \\ \cline{1-2} & X^3 & -X^2 & -8X & -4 & \\ & -(X^3 & +2X^2) & & & \\ \cline{2-3} & & -3X^2 & -8X & -4 & \\ & & -(-3X^2 & -6X) & & \\ \cline{3-4} & & & -2X & -4 & \\ & & & -(-2X & -4) & \\ \cline{4-5} & & & & 0 & \end{array}$$

On a donc toujours,

$$P = (X+2)\left(X^3 + X^2 - 3X - 2\right).$$

Posons $P_1 = X^3 + X^2 - 3X - 2$. On observe que -2 est encore une racine de P_1 :

$$P_1(-2) = -8 + 4 + 6 - 2 = 0.$$

Donc de même que précédemment (par la méthode de votre choix),

$$P_1 = (X+2)\left(X^2 - X - 1\right).$$

Donc $P = (X+2)^2\left(X^2 - X - 1\right)$. Soient $P_2 = X^2 - X - 1$ et Δ son discriminant. On a $\Delta = 1+4 = 5$. Donc les racines associées sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Conclusion, la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ de P est donnée par

$$\boxed{P = (X+2)^2\left(X - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).}$$

5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left[n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) - n\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right] + i\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Solution. On a

$$\begin{aligned}
n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) - n\cos\left(\frac{1}{n}\right) &\underset{n\to+\infty}{=} n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - n\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} n - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - n + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}\left(u_n\right) = 0.$$

De plus,

$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{n\left(\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{2+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^2.$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}\left(u_n\right) = \mathrm{e}^2.$$

Conclusion, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = i\,\mathrm{e}^2.}$$