Correction de l'interrogation 19
Espaces vectoriels

1. (a) Définir et caractériser deux espaces en somme directe.

   Solution. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les espaces F et G sont en somme directe si et seulement si (par définition)

$$\forall (x, x') \in F^2,\ \forall (y, y') \in G^2, \qquad (x + y = x' + y') \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

   si et seulement si (par caractérisation) :

$$F \cap G = \{0_E\}.$$

   (b) Définir et caractériser deux espaces supplémentaires.

   Solution. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les espaces F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si (par définition)

$$\forall z \in E,\ \exists!\, (x, y) \in F \times G, \quad z = x + y.$$

   si et seulement si (par caractérisation) :

   1. $F \cap G = \{0_E\}$.
   2. $F + G = E$.

   (c) Enumérer les opérations qu'il est possible de faire sur les équivalents et celles que l'on sait fausses en général.

   Solution. Sur les équivalents, il est possible de

   - multiplier,
   - d'élever à la puissance (éventuellement négative et donc de passer à l'inverse),
   - de passer à la valeur absolue,
   - de faire un changement de variable.

   Il est cependant interdit

   - de sommer des équivalents,
   - de composer des équivalents par une fonction,
   - d'écrire équivalent à 0.

2. Soit $E = \left\{ f \in \mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \;\middle|\; f^{(3)} = f \right\}$. Démontrer si E est un espace vectoriel ou non.

   Solution. Montrons que E est un espace vectoriel.

   - $E \subseteq \mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par définition.
   - Si $f = 0_{\mathscr{C}^3(\mathbb{R},\mathbb{R})}$, alors $f' = f'' = f^{(3)} = 0_{\mathscr{C}^3(\mathbb{R},\mathbb{R})}$ et donc $f^{(3)} = f$. Ainsi, $0_{\mathscr{C}^3(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in E$.
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in E^2$. Posons $h = \lambda f + \mu g$ et montrons que $h \in E$. On a par linéarité de la dérivation,

$$\begin{aligned} h^{(3)} &= (\lambda f + \mu g)^{(3)} \\ &= \lambda f^{(3)} + \mu g^{(3)} \\ &= \lambda f + \mu g \qquad \text{car } f \in E \text{ et } g \in E \\ &= h. \end{aligned}$$

   Donc $h \in E$ et E est stable par combinaisons linéaires.

   Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Conclusion,

$$\boxed{E \text{ est un espace vectoriel.}}$$

3. Soient $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(1, X^2\right)$ et $G = \{\, P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = P(-1) = 0 \,\}$. Calculer $F + G$.
Solution. Observons que

$$\begin{aligned} G &= \left\{ a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; \begin{cases} a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ a_2 - a_1 + a_0 = 0 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; \begin{cases} a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ -2a_1 = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L - 1 \right\} \\ &= \left\{ a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; \begin{cases} a_0 = -a_2 \\ a_1 = 0 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ a_2X^2 - a_2 \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; a_2 \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(X^2 - 1\right). \end{aligned}$$

Autre méthode, soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\begin{aligned} P \in G \quad &\Leftrightarrow \quad P(1) = P(-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \text{ et } -1 \text{ sont deux racines de } P \\ &\Leftrightarrow \quad (X-1)(X+1) \text{ divise } P \\ &\Leftrightarrow \quad \exists Q \in \mathbb{R}[X],\ P = (X-1)(X+1)\,Q = \left(X^2 - 1\right) Q. \end{aligned}$$

Or $P \in \mathbb{R}_2[X]$ donc $Q \in \mathbb{R}_0[X]$. Ainsi,

$$P \in G \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ P = \lambda\left(X^2 - 1\right) \quad \Leftrightarrow \quad P \in \mathrm{Vect}\left(X^2 - 1\right).$$

Donc

$$G = \mathrm{Vect}\left(X^2 - 1\right).$$

On a donc

$$\begin{aligned} F + G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(1, X^2\right) + \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(X^2 - 1\right) &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(1, X^2, X^2 - 1\right) \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(1, X^2, 0_{\mathbb{R}[X]}\right) \qquad C_3 \leftarrow C_3 - C_2 + C_1 \\ &= \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(1, X^2\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{F + G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(1, X^2\right).}$$

4. Montrer que $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right)$ et $G = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$ sont supplémentaires dans $E = \mathbb{R}^4$.

Solution. Commençons par calculer l'intersection. Soit $u \in \mathbb{R}^4$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
u \in F \cap G \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u \in F \\ u \in G \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ u = x\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\0\\0\end{bmatrix} \\ \exists\,(z,t) \in \mathbb{R}^2,\ u = z\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}z\\t\\z\\t\end{bmatrix} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\,(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ u = \begin{bmatrix}x\\y\\0\\0\end{bmatrix} \\ x = z \\ y = t \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\,(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ u = \begin{bmatrix}x\\y\\0\\0\end{bmatrix} \\ x = y = z = t = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad u = 0_{\mathbb{R}^4}.
\end{aligned}$$

Par conséquent $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ et F et G sont en somme directe.
De plus, montrons que $F + G = E$. On a

$$F + G = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}\right) + \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right).$$

Or les opérations élémentaires sur les vecteurs ne modifient pas l'espace engendré. Donc

$$\begin{aligned}
F + G &= \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right) \qquad \begin{array}{l} C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_2 \end{array} \\
&= \left\{ a\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} + d\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix} \;\middle|\; (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.
\end{aligned}$$

Donc on a bien $F + G = \mathbb{R}^4 = E$.
Conclusion,

$$\boxed{F \oplus G = E.}$$

5. Déterminer la multiplicité de 2 pour le polynôme $P = X^4 - 3X^3 - 6X^2 + 28X - 24$.
Solution. On observe que
$$P(2) = 16 - 24 - 24 + 56 - 24 = 72 - 72 = 0.$$

Donc 2 est racine de P. De plus, $P' = 4X^3 - 9X^2 - 12X + 28$ et

$$P'(2) = 32 - 36 - 24 + 28 = -4 + 4 = 0.$$

Poursuivons, $P'' = 12X^2 - 18X - 12$ et

$$P''(2) = 48 - 36 - 12 = 12 - 12.$$

Encore, $P^{(3)} = 24X - 18$ et

$$P^{(3)}(2) = 48 - 18 = 30 \neq 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{2 est une racine de } P \text{ de multiplicité 3.}}$$