Correction de l'interrogation 20
Familles de vecteurs

1. (a) Définir et caractériser une famille liée.

   Solution. Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{L} = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{L}$ est liée si et seulement si

   - L'un des vecteurs au moins de $\mathscr{L}$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{L}$
   - i.e. il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, tel que

   $$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E.$$

   (b) Enoncer le théorème de la base adaptée.

   Solution. Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F et $\mathscr{B}_G$ une base de G. On pose $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$. Alors,

   - $F \cap G = \{0_E\} \;\Leftrightarrow\; \mathscr{B}$ est libre.
   - $F + G = E \;\Leftrightarrow\; \mathscr{B}$ est génératrice dans E.
   - $F \oplus G = E \;\Leftrightarrow\; \mathscr{B}$ est une base de E.

   (c) Caractériser la bijectivité d'une fonction par l'existence d'un inverse.

   Solution. Soient E, F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E, F)$. La fonction f est bijective si et seulement s'il existe $g \in \mathscr{F}(F, E)$ telle que

   $$f \circ g = \mathrm{Id}_F \qquad \text{et} \qquad g \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

   De plus dans ce cas, $g = f^{-1}$.

2. Déterminer une famille génératrice de $F = \{\, P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2) \text{ et } P'(1) = P'(-1) \,\}$.

   Solution. Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
P \in F \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(1) = P(2) \\ P'(1) = P'(-1) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = a_1 - 2a_2 + 3a_3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 + 3a_2 + 7a_3 = 0 \\ 4a_2 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = -3a_2 - 7a_3 = -7a_3 \\ a_2 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad P = a_0 - 7a_3 X + a_3 X^3.
\end{aligned}$$

   Dès lors, on en déduit que

   $$F = \mathrm{Vect}\left(1, X^3 - 7X\right).$$

   Conclusion,

   $$\boxed{\mathscr{G} = \left(1, X^3 - 7X\right) \text{ est une famille génératrice de } F.}$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $\left(A, A^2, A^3 - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre.

   Solution. On a les égalités matricielles suivantes :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix},$$

$$A^3 - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 17 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $aA+bA^2+c\left(A^2-2I_2\right)=O_2$. Alors,

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2a+4b+6c & a+5b+17c \\ 0 & 3a+9b+25c \end{pmatrix} = O_2
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+4b+6c=0 \\ a+5b+17c=0 \\ 3a+9b+25c=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+3c=0 \\ a+5b+17c=0 \\ 3a+9b+25c=0 \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+3c=0 \\ 3b+14c=0 \\ 3b+16c=0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-3L_1 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+3c=0 \\ 3b+14c=0 \\ 2c=0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3-L_2 \\
&\Leftrightarrow \quad a=b=c=0.
\end{aligned}
$$

Conclusion,

$$\boxed{\left(A, A^2, A^3-2\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right) \text{ est libre.}}$$

4. On admet que $\mathscr{B}=\left(1+X, X+X^2, X^2+1\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de $2+3X+5X^2$ dans cette base.
Solution. Soient $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. On a l'équivalence suivante :

$$2+3X+5X^2 = a\,(1+X)+b\left(X+X^2\right)+c\left(X^2+1\right) \quad\Leftrightarrow\quad 2+3X+5X^2=(a+c)+(a+b)\,X+(b+c)\,X^2.$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, cela est aussi équivalent à

$$
\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{cccc} a & & +c & =2 \\ a & +b & & =3 \\ & b & +c & =5 \end{array}\right.
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} a & & +c & =2 \\ & b & -c & =1 \\ & b & +c & =5 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} a & & +c & =2 \\ & b & -c & =1 \\ & & 2c & =4 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3-L_2 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a=2-c=0 \\ b=1+c=3 \\ c=2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Les coordonnées de } 2+3X+5X^2 \text{ dans la base } \mathscr{B}=\left(1+X, X+X^2, X^2+1\right) \text{ sont } (0,3,2).}$$

5. Soit $F=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}\right)$ et $G=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a+c-d=2a+3c-3d=0\right\}$. A l'aide du théorème de la base adaptée, montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Solution. On a

$$\begin{aligned}
G &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{l} a+c-d=0 \\ 2a+3c-3d=0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{l} a+c-d=0 \\ -a=0 \end{array} \right\} && L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{l} c=d \\ a=0 \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (b,c) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Posons $\mathscr{B}_F = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Les deux matrices n'étant pas colinéaires, $\mathscr{B}_F$ est libre. De plus $\mathscr{B}_F$ engendre F, $\mathscr{B}_F$ est donc une base de F.
Posons également $\mathscr{B}_G = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$. Les deux matrices n'étant pas colinéaires, $\mathscr{B}_G$ est libre et par ce qui précède, $\mathscr{B}_G$ engendre G. Donc $\mathscr{B}_G$ est une base de G.
Posons enfin $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$. Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré, dès lors,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Vect}(\mathscr{B}) &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) && C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) && C_2 \leftarrow -\tfrac{1}{2} C_2 \\
&= \operatorname{Vect}\underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)}_{\text{base canonique de } \mathscr{M}_2(\mathbb{R})} && \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - C_3 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_2 \end{array} \\
&= \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{B}$ est génératrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Montrons de plus que $\mathscr{B}$ est libre. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, tel que

$$a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0_2.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\begin{cases} a+b=0 \\ a+b+c=0 \\ a-b+d=0 \\ d=0 \end{cases}
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a+b+c=0 \\ a-b=0 \\ d=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ -2b=0 \\ d=0 \end{cases} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \quad a=b=c=d=0.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{B}$ est libre. Or $\mathscr{B}$ est aussi génératrice donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Ainsi,

- $\mathscr{B}_F$ base de F,
- $\mathscr{B}_G$ base de G,
- $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$ base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Conclusion, par le théorème de la base adaptée,

$$\boxed{\text{les espaces } F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$