Réponses de l'interrogation 20
Familles de vecteurs

1. (a) Définir et caractériser une famille liée.
   Solution. Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{L} = (u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{L}$ est liée si et seulement si
   - L'un des vecteurs au moins de $\mathscr{L}$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{L}$
   - i.e. il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$, tel que

   $$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E.$$

   (b) Enoncer le théorème de la base adaptée.
   Solution. Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F et $\mathscr{B}_G$ une base de G. On pose $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$. Alors,
   - $F \cap G = \{0_E\} \iff \mathscr{B}$ est libre.
   - $F + G = E \iff \mathscr{B}$ est génératrice dans E.
   - $F \oplus G = E \iff \mathscr{B}$ est une base de E.

   (c) Caractériser la bijectivité d'une fonction par l'existence d'un inverse.
   Solution. Soient E, F deux ensembles et $f \in \mathscr{F}(E, F)$. La fonction f est bijective si et seulement s'il existe $g \in \mathscr{F}(F, E)$ telle que

   $$f \circ g = \mathrm{Id}_F \qquad \text{et} \qquad g \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

   De plus dans ce cas, $g = f^{-1}$.

2. Déterminer une famille génératrice de $F = \{\, P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2) \text{ et } P'(1) = P'(-1) \,\}$.
   Solution. Conclusion,

   $$\boxed{\mathscr{G} = \left(1, X^3 - 7X\right) \text{ est une famille génératrice de } F.}$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $\left(A, A^2, A^3 - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre.
   Solution. Conclusion,

   $$\boxed{\left(A, A^2, A^3 - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est libre.}}$$

4. On admet que $\mathscr{B} = \left(1 + X, X + X^2, X^2 + 1\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de $2+3X+5X^2$ dans cette base.
   Solution. Conclusion,

   $$\boxed{\text{Les coordonnées de } 2 + 3X + 5X^2 \text{ dans la base } \mathscr{B} = \left(1 + X, X + X^2, X^2 + 1\right) \text{ sont } (0, 3, 2).}$$

5. Soit $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ et $G = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a + c - d = 2a + 3c - 3d = 0\right\}$. A l'aide du théorème de la base adaptée, montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   Solution. Conclusion, par le théorème de la base adaptée,

   $$\boxed{\text{les espaces } F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$