Correction de l'interrogation 21
Série

1. (a) Enoncer le théorème sur les séries de Riemann.

   Solution. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Une série de Riemann $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si son exposant vérifie $\alpha > 1$.

   (b) Définir la convergence absolue. Quelle est l'implication associée ? Contre-exemple de la réciproque ?

   Solution. Soit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique.

   - On dit que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument si et seulement si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge.
   - La converge absolue implique la convergence.
   - La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument car $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est la série harmonique qui diverge.

   (c) Enoncer le théorème d'encadrement.

   Solution. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a, f, g et h trois éléments de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. On suppose que

   - pour tout $x \in I$, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$,
   - il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$.

   Alors on a également $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\operatorname{ch}(2n)}{\operatorname{sh}(3n)}$.

   Solution. On sait que $\operatorname{ch}(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \operatorname{sh}(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^u}{2}$. Donc en prenant $u = 2n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ d'une part et $v = 3n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ d'autre part, on obtient, $\operatorname{ch}(2n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{2n}}{2}$ et $\operatorname{sh}(3n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{3n}}{2}$. Par quotient,

   $$u_n = \frac{\operatorname{ch}(2n)}{\operatorname{sh}(3n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{\mathrm{e}^{2n}}{2}}{\frac{\mathrm{e}^{3n}}{2}} = \frac{1}{\mathrm{e}^n} = \mathrm{e}^{-n}.$$

   Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{-n} \geqslant 0$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{-n}$ converge en tant que série géométrique de raison $q = \mathrm{e}^{-1} \in]-1;1[$. Donc par le théorème des équivalents des séries à termes positifs, on en conclut que

   $$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{(n+3)!} \sum\limits_{k=1}^{n} k!$ Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$.

   On pourra encadrer $k!$

   Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On observe que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $k! \leqslant n!$ Donc

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant u_n = \frac{1}{(n+3)!}\sum_{k=1}^{n} k! \leqslant \frac{n!}{(n+3)!}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \times n \leqslant \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

   D'où

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

   Or la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ convergent en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs,

   $$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$$

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n}+\sin(n)}{n^3}$. Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on observe que par l'inégalité triangulaire,

$$0 \leqslant |u_n| = \frac{|(-1)^n\sqrt{n}+\sin(n)|}{|n^3|} \leqslant \frac{|(-1)^n\sqrt{n}|+|\sin(n)|}{n^3} \leqslant \frac{\sqrt{n}+1}{n^3}.$$

Or pour tout $n \geqslant 1$, $1 \leqslant \sqrt{n}$ donc $\sqrt{n}+1 \leqslant \sqrt{n}+\sqrt{n} = 2\sqrt{n}$. D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant |u_n| \leqslant 2\frac{\sqrt{n}}{n^3} = 2\frac{1}{n^{5/2}}.$$

Donc

$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge absolument en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n|$ converge, autrement dit $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Conclusion,

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge absolument.}}$$

5. Déterminer un équivalent des sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant n_0} \frac{\ln^2(n)}{n}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \geqslant e^2+1$.

Solution. Soit $f : t \mapsto \frac{\ln^2(t)}{t}$. La fonction f est définie et même dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(t) = \frac{2\frac{1}{t}\ln(t)t - \ln^2(t)}{t^2} = \frac{2\ln(t)-\ln^2(t)}{t^2} = \frac{\ln(t)\,(2-\ln(t))}{t^2}.$$

Donc pour tout $t \geqslant \mathrm{e}^2$, $2-\ln(t) \leqslant 2-2 = 0$, $\ln(t) \geqslant 0$ et $t^2 > 0$. Donc $f'(t) = \frac{\ln(t)(2-\ln(t))}{t^2} \leqslant 0$ et la fonction f est décroissante sur $\left[\mathrm{e}^2;+\infty\right[$. Ainsi, la fonction f est continue et décroissante sur $\left[\mathrm{e}^2;+\infty\right[$. Donc par le théorème de comparaison série-intégrale, pour tout $N \geqslant n_0 \geqslant \mathrm{e}^2+1$,

$$\int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n_0}^{N} f(k) \leqslant \int_{n_0-1}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\begin{aligned}\int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{n_0}^{N+1} \frac{\ln^2(t)}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{\ln^3(t)}{3}\right]_{t=n_0}^{t=N+1} \qquad \text{car on reconnaît du } u'u^2\\ &= \frac{\ln^3(N+1)}{3} - \frac{\ln^3(n_0)}{3}.\end{aligned}$$

De même,

$$\int_{n_0-1}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\ln^3(N)}{3} - \frac{\ln^3(n_0-1)}{3}.$$

Ainsi, pour tout $N \geqslant n_0 \geqslant \mathrm{e}^2+1$,

$$\frac{\ln^3(N+1)}{3} - \frac{\ln^3(n_0)}{3} \leqslant \sum_{k=n_0}^{N} \frac{\ln^2(k)}{k} \leqslant \frac{\ln^3(N)}{3} - \frac{\ln^3(n_0-1)}{3}.$$

Or $\ln(N+1) = \ln(N) + \ln\left(1+\frac{1}{N}\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(N)$. Donc par passage à la puissance, $\ln^3(N+1) \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln^3(N)$. Ainsi,

$$\frac{\ln^3(N+1)}{3} - \frac{\ln^3(n_0)}{3} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^3(N)}{3}.$$

De plus

$$\frac{\ln^3(N)}{3} - \frac{\ln^3(n_0 - 1)}{3} \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{\ln^3(N)}{3}.$$

Conclusion, par le théorème d'encadrement des équivalents,

$$\boxed{\sum_{k=n_0}^{N} \frac{\ln^2(k)}{k} \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{\ln^3(N)}{3}.}$$