Correction de l'interrogation 22
Dimension

1. (a) Enoncer le théorème de la base incomplète.

   Solution. Soient E un espace vectoriel non nul de dimension finie, $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E et $\mathscr{L}$ une famille libre de E. En ajoutant des vecteurs de $\mathscr{G}$ à $\mathscr{L}$, il est possible de construire $\mathscr{B}$ une sur-famille de $\mathscr{L}$ qui soit une base de E.

   (b) Caractériser par le rang le fait qu'une famille soit génératrice/libre/base.

   Solution. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p) \in E^p$ une famille de p vecteurs de E. Alors

   - $\mathscr{F}$ est génératrice dans E si et seulement si $\mathrm{rg}\,(\mathscr{F}) = n$.
   - $\mathscr{F}$ est libre dans E si et seulement si $\mathrm{rg}\,(\mathscr{F}) = p$.
   - $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{rg}\,(\mathscr{F}) = n = p$.

   (c) Définir la convergence d'une suite complexe (définition IV.1).

   Solution. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{C}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si la suite réelle $(|u_n - l|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0, \qquad |u_n - l| \leqslant \varepsilon\,.$$

2. Déterminer la dimension de $E = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; P(1) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \right\}$.

   Solution. On a les égalités entre ensembles suivantes :

$$\begin{aligned}
E &= \left\{ a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; a_0 + a_1 + a_2 = \int_0^1 a_0 + a_1t + a_2t^2\,\mathrm{d}t = \left[a_0t + \frac{a_1}{2}t^2 + \frac{a_2}{3}t^3\right]_{t=0}^{t=1} \right\}\\
&= \left\{ a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; a_0 + a_1 + a_2 = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} \right\}\\
&= \left\{ a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; a_1 + a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} \right\}\\
&= \left\{ a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; \frac{a_1}{2} = -\frac{2}{3}a_2 \right\}\\
&= \left\{ a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; a_1 = -\frac{4}{3}a_2 \right\}\\
&= \left\{ a_0 - \frac{4}{3}a_2X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; (a_0, a_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}\\
&= \mathrm{Vect}\left(1, X^2 - \frac{4}{3}X\right).
\end{aligned}$$

   Posons $\mathscr{B}_E = \left(1, X^2 - \frac{4}{3}X\right)$. On vient donc de montrer que $\mathscr{B}_E$ engendre E. De plus E est composée de deux vecteurs non colinéaires et est donc libre. Donc $\mathscr{B}_E$ est une base de E. Conclusion,

$$\boxed{\dim(\mathscr{B}_E) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_E) = 2.}$$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer un supplémentaire à $F = \{ M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = 0_2 \}$.

Solution. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
AM = 0_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix} = 0_2 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+2c=0 \\ b+2d=0 \\ 2a+4c=0 \\ 2b+4d=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+2c=0 \\ b+2d=0 \end{cases} \qquad \text{car} \quad \begin{matrix} L_3 = 2L_1 \\ L_4 = 2L_2 \end{matrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=-2c \\ b=-2d \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$F = \text{Vect}\underbrace{\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}_{=\mathscr{B}_F}$$

La famille $\mathscr{B}_F$ engendre F. De plus $\mathscr{B}_F$ est constitué de deux matrices non colinéaires donc $\mathscr{B}_F$ est libre. D'où $\mathscr{B}_F$ est une base de F et donc

$$\dim(F) = \text{Card}(\mathscr{B}_F) = 2.$$

Posons $\mathscr{B}_G = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ et $G = \text{Vect}(\mathscr{B}_G)$. La famille $\mathscr{B}_G$ est libre car ses deux matrices sont non colinéaires et engendre G donc $\mathscr{B}_G$ est une base de G. En particulier, $\dim(G) = \text{Card}(\mathscr{B}_G) = 2$. Montrons que F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Méthode 1. Puisque les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré, on a les égalités ensemblistes suivantes :

$$\begin{aligned}
F + G &= \text{Vect}(\mathscr{B}_F) + \text{Vect}(\mathscr{B}_G) \\
&= \text{Vect}(\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G) \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \qquad \begin{matrix} C_1 \leftarrow C_1 + 2C_3 \\ C_2 \leftarrow C_2 + 2C_4 \end{matrix} \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \begin{matrix} C_1 \leftrightarrow C_3 \\ C_2 \leftrightarrow C_4 \end{matrix} \\
&= \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),
\end{aligned}$$

car on reconnait la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. De plus, par ce qui précède,

$$\dim(F) + \dim(G) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})).$$

Conclusion,

$$\boxed{G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

Méthode 2. Soit $M \in F \cap G$. Alors, $F \in G$, donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, $M \in F$ donc $AM = 0_2$ i.e.

$$0_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{pmatrix}.$$

Donc $a = b = 0$ et donc $M = 0_2$. Ainsi, $F \cap G \subseteq \{0_2\}$ or $\{0_2\} \subseteq F \cap G$ et donc $F \cap G = \{0_2\}$. De plus, par ce qui précède,

$$\dim(F) + \dim(G) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})).$$

Conclusion,

$$\boxed{G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

4. Soit $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer le rang de $\mathscr{F} = \left(I_3, U, U^2, U^3, U^4, U^5\right)$.

Solution. On a les égalités matricielles suivantes :

$$\begin{aligned}
U^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
U^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
U^4 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = I_3 \\
U^5 &= U \times U^4 = U \times I_3 = U.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}\left(I_3, U, U^2, U^3, I_3, U\right) = \mathrm{rg}\left(I_3, U, U^2, U^3\right) \qquad \text{car} \quad \begin{array}{l} C_5 = C_1 \\ C_6 = C_2 \end{array}.$$

Les opérations élémentaires ne modifient pas le rang,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(\mathscr{F}) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \qquad \begin{array}{l} C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 + C_2 \end{array} \\
&= \mathrm{rg}\underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)}_{=\mathscr{L}} \qquad \text{car } C_3 = C_4.
\end{aligned}$$

On récupère une famille $\mathscr{L}$ de matrices « échelonnée » en ses coordonnées. Montrons qu'elle est libre. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3.$$

Alors, $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a+b+2c & 0 \\ -b & 0 & a \end{pmatrix} = O_3$ et donc $a = b = c = 0$. Donc $\mathscr{L}$ est libre. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}(\mathscr{L}) = \mathrm{Card}(\mathscr{L}) = 3.}$$

5. A l'aide de la dimension, montrer que les espaces vectoriels $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c} x-2y+3z=0 \\ x-y+z=0 \end{array} \right\}$ et $G = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+2y+z=0 \right\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
Solution. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
u \in F \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=2y-3z=4z-3z=z \\ y=2z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad u=(z,2z,z)=z\,(1,2,1)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$F = \left\{ z\,(1,2,1) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\,\underbrace{((1,2,1))}_{=\mathscr{B}_F}.$$

La famille $\mathscr{B}_F$ engendre F et est de plus libre car constituée d'un seul vecteur non nul. Donc $\mathscr{B}_F$ est une base de F et ainsi,

$$\dim(F) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_F) = 1.$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
G &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+2y+z=0 \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x=-2y-z \right\} \\
&= \left\{ (-2y-z,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (y,z)\in\mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \left\{ y\,(-2,1,0)+z\,(-1,0,1) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (y,z)\in\mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\,\underbrace{((-2,1,0),(-1,0,1))}_{=\mathscr{B}_G}
\end{aligned}$$

La famille $\mathscr{B}_G$ engendre G et est de plus libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires. Donc $\mathscr{B}_G$ est une base de G et ainsi,

$$\dim(G) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_G) = 2.$$

On observe donc que

$$\dim(F)+\dim(G) = 1+2 = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right).$$

Méthode 1. De plus, soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}
u \in F\cap G \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ x-y+z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ y-2z=0 \\ 4y-2z=0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-2y+3z=0 \\ y-2z=0 \\ 6z=0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \\
&\Leftrightarrow \quad x=y=z=0 \\
&\Leftrightarrow \quad u=0_{\mathbb{R}^3}.
\end{aligned}$$

Donc $F\cap G=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Conclusion,

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémantaires dans } \mathbb{R}^3.}$$

Méthode 2. Puisque les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré, on a les égalités ensemblistes suivantes :

$$
\begin{aligned}
F+G &= \operatorname{Vect}\left(\mathscr{B}_F\right)+\operatorname{Vect}\left(\mathscr{B}_G\right) \\
&= \operatorname{Vect}\left(\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G\right) \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right) \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}\right) && \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2+2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3+C_1 \end{array} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\2\end{pmatrix}\right) && C_2 \leftrightarrow \tfrac{1}{2}C_3 \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) && C_3 \leftrightarrow -\tfrac{1}{3}\left(C_3-5C_2\right) \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) && \begin{array}{l} C_1\ leftarrow C_1-C_3 \\ C_2 \leftrightarrow C_2-C_3 \end{array} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) && C_1\ leftarrow C_1-2C_2 \\
&= \mathbb{R}^3,
\end{aligned}
$$

car on reconnait la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donc $F+G=\mathbb{R}^3$. Conclusion,

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémantaires dans } \mathbb{R}^3.}$$