Correction de l'interrogation 23
Dénombrement

1. (a) Caractériser les bijections sur les ensembles finis.
Solution. Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal et $\varphi \in \mathscr{F}(E, F)$. Alors

$$\varphi \text{ est bijective} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \text{ est injective} \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \text{ est surjective.}$$

(b) A quel type de tirage correspond à p-uplet ? Un arrangement ? une combinaison ?
Solution.
- La construction d'un p-uplet d'éléments dans un ensemble E de cardinal n correspond à un tirage successif et avec remise de p éléments parmi n.
- La construction d'un arrangement de p éléments parmi n correspond à un tirage successif et sans remise de p éléments parmi n.
- La construction d'une combinaison de p éléments parmi n correspond à un tirage simultané de p éléments parmi n.

(c) Définir une racine de multiplicité m.
Solution. Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une racine de P de multiplicité m si et seulement si

$$(X-\alpha)^m \text{ divise } P \qquad \text{et} \qquad (X-\alpha)^{m+1} \text{ ne divise pas } P.$$

2. Un berger possède 500 moutons (brebis ou béliers, noirs ou blancs). On recense 278 moutons noirs, 254 moutons sont ou des brebis ou des moutons blancs et 93 moutons sont ou des béliers ou des moutons noirs. Comment le troupeau compte-t-il de brebis ?
Solution. Notons E l'ensemble des moutons, A l'ensemble des brebis et B l'ensemble des moutons blancs. On a $|E| = 500$, $\left|\overline{B}\right| = 278$, $|A \cup B| = 254$, $\left|\overline{A} \cup \overline{B}\right| = 93$. On cherche à déterminer $|A|$. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
|A| &= |A \cap B| + |A \cup B| - |B| \\
&= |E| - \left|\overline{A \cap B}\right| + |A \cup B| - \left(|E| - \left|\overline{B}\right|\right) \\
&= |E| - \left|\overline{A} \cup \overline{B}\right| + |A \cup B| - |E| + \left|\overline{B}\right| \\
&= -\left|\overline{A} \cup \overline{B}\right| + |A \cup B| + \left|\overline{B}\right| \\
&= -93 + 254 + 278 \\
&= 161 + 278 \\
&= 439.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{le troupeau compte 439 brebis.}}$$

3. On dispose avec ordre sur une table 5 cartes prises dans un jeu de 52 cartes qui comprend 13 cartes carreaux. Déterminer le nombre de dispositions comprenant exactement quatre cartes de carreaux.
Solution.
- On commence par choisir la place de la carte non-carreau : 5 places possibles.
- On choisit ensuite la carte non-carreau que l'on met à cette place choisie : $52 - 13 = 39$ cartes non-carreaux.
- Il nous reste donc à placer 4 cartes carreaux dans les 4 places restantes. *Méthode 1.* On choisit les 4 carreaux :

$$\binom{13}{4} \text{ choix possibles.}$$

Ensuite, on place ces carreaux : $A_4^4 = 4!$ choix (c'est une permutation). Ce qui nous donne un sous-total de

$$4!\binom{13}{4} = 4!\frac{13!}{4!\,(13-4)!} = \frac{13!}{9!} = 13 \times 12 \times 10 = 1560 \text{ choix.}$$

Méthode 2. On choisit et on place au fur et à mesure les 4 carreaux, il s'agit d'un arrangement de 4 parmi 13 :

$$A_13^4 = \frac{13!}{(13-4)!} = \frac{13!}{9!} = 13 \times 12 \times 10 = 1560 \text{ choix.}$$

Au total,

$$\boxed{5 \times 39 \times 1560 = 5 \times 60\,840 = 304\,200 \text{ dispositions possibles.}}$$

4. On possède 5 boules rouges indiscernables, 5 boules oranges indiscernables et 5 boules vertes indiscernables. On tire successivement 5 boules. Combien de tirages apportent le résultat suivant : une et une seule boule parmi les places 2 à 5 est de la même couleur que la boule à la première place ?

Solution. On choisit la couleur de la première boule : 3 choix. On choisit ensuite la place de la boule de la même couleur que la première boule parmi les places 2 à 5 : 4 choix. On tire alors dans les 3 places restantes des boules des couleurs autre que celle obtenue pour la première boule : 2 choix pour chacune de ces places (il s'agit donc de la construction d'un triplet dans un ensemble de cardinal 2) et donc 2^3 choix. Au total :

$$\boxed{4 \times 3 \times 2^3 = 12 \times 8 = 96 \text{ possibilités.}}$$

5. Déterminer un équivalent en 0 de $f : x \mapsto \frac{\ln(1+\tan(x))}{\sqrt{\sin(x)+x^2\cos(x)}}$.

Solution. On sait que $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$. Ainsi,

$$\ln\left(1+\tan(x)\right) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(1 + x + o(x)\right).$$

Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Alors $o\left(u(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x+o(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o(x)$. Or $\ln\left(1+u\right) \underset{u\to 0}{=} u + o(x)$. D'où

$$\ln\left(1+\tan(x)\right) \underset{x\to 0}{=} x + o(x) + o(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

D'autre part, $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $x^2\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$. Donc $x^2\cos(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(\sin(x)\right)$. Ainsi,

$$\sin(x) + x^2\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Par élévation à la puissance 1/2,

$$\sqrt{\sin(x)+x^2\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}.$$

Par quotient,

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}.}$$