Interrogation 26
Intégration

Nom/Prénom :

Note :

1. (a) Enoncer le théorème fondamental de l'analyse.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   (b) Enoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   (c) Enoncer le théorème sur la nature de deux séries dont les termes généraux sont équivalents.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. A l'aide d'un glissement d'indice, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. Déterminer le domaine de dérivabilité de $\varphi : x \mapsto \int_{|x|}^{x^2} \ln(1+t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t$ et donner une expression de sa dérivée.
   On pourra noter $\operatorname{sgn}(x)$ *le signe de* x *valant* 1 *si* $x \geqslant 0$ *et* -1 *si* $x \leqslant 0$.

5. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 5 pour la fonction $f : t \mapsto \sin(t)$ aux points $a = \pi$ (et non $0\,!$) et $b = x \in [\pi; +\infty[$ puis montrer que son reste est majoré en valeur absolue par $\frac{(x-\pi)^6}{6!}$.