Correction de l'interrogation 26
Intégration

1. (a) Enoncer le théorème fondamental de l'analyse.

   Solution. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}(I)$, $a \in I$ et $A \in \mathbb{R}$. Alors la fonction

$$F: \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto A + \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \end{array}$$

   existe, est continue et même $\mathscr{C}^1$ sur I et est l'unique primitive de f sur I vérifiant $F(a) = A$.

   (b) Enoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

   Solution. Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a;b])$. Alors,

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \sup_{z \in [a;b]} \left| f^{(n+1)}(z) \right| \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

   (c) Enoncer le théorème sur la nature de deux séries dont les termes généraux sont équivalents.

   Solution. Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries numériques. Si

   1 $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$

   2 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant à partir d'un certain rang (ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$)

   Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par décroissance de la fonction cosinus sur $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \leqslant \cos(t) \leqslant \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

   Donc par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $[0;1]$,

$$\forall t \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right], \qquad 0 \leqslant \cos^n(t) \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

   Or pour tout $t \geqslant 0$, $1 + t^2 > 0$, donc

$$\forall t \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right], \qquad 0 \leqslant \frac{\cos^n(t)}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{2^n(1+t^2)}.$$

   Par croissance de l'intégrale sur $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ car $\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{2}$, on obtient que

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2^n} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

   Or

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_{t=\frac{\pi}{3}}^{t=\frac{\pi}{2}} = \arctan\left(\frac{\pi}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

   Ouuuuuh le vilain piège, naturellement ces valeurs ne sont pas remarquables pour l'arctangente. Ainsi,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\arctan\left(\frac{\pi}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2^n} \leqslant \frac{\arctan\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2^n} \leqslant \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2^{n+1}} = 0$. Donc par le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. A l'aide d'un glissement d'indice, calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\tilde{k} = k - n$ i.e. $k = \tilde{k} + n$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{\tilde{k}=0}^{n} \frac{1}{\tilde{k}+n} \\
&= \sum k = 0^n \frac{1}{k+n} && \text{car l'indice de sommation est muet} \\
&= \sum k = 1^n \frac{1}{k+n} + \frac{1}{n} && \text{car } n \geqslant 1 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} + \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Posons $a = 0$, $b = 1$ et $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$. On a

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) + \frac{1}{n}.$$

On a $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$. De plus, on reconnait une somme de Riemann. Or la fonction f est continue sur $[0;1]$. Par conséquent, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} S_n &= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + 0 \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\ln\left(|1+t|\right)\right]_{t=0}^{t=1} \\
&= \ln(2).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = \ln(2).}$$

4. Déterminer le domaine de dérivabilité de $\varphi : x \mapsto \int_{|x|}^{x^2} \ln(1+t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t$ et donner une expression de sa dérivée. *On pourra noter* $\operatorname{sgn}(x)$ *le signe de* x *valant* 1 *si* $x \geqslant 0$ *et* -1 *si* $x \leqslant 0$.

Solution. Soit $f : t \mapsto \ln(1+t)\cos(2t)$. La fonction f est définie et même continue sur $]-1;+\infty[$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left[|x|\,;x^2\right] \subseteq \mathbb{R}_+$ ou $\left[x^2;|x|\right] \subseteq \mathbb{R}_+$. Donc φ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Posons pour tout $x \in]-1;+\infty[$,

$$F(x) = \int_0^x \ln(1+t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t.$$

Par le théorème fondamental de l'analyse, F est définie et même $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$ et pour tout $x \in]-1;+\infty[$, $F'(x) = f(x)$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \int_{|x|}^{x^2} \ln(1+t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x^2} \ln(1+t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{|x|} \ln(1+t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t = F\left(x^2\right) - F\left(|x|\right).$$

La fonction F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto |x|$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Donc par composition et différence, φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \varphi'(x) = 2xF'\left(x^2\right) - \operatorname{sgn}(x)F'\left(|x|\right) = 2x\ln\left(1+x^2\right)\cos\left(2x^2\right) - \operatorname{sgn}(x)\ln\left(1+|x|\right)\cos(2x).}$$

Bonus : en fait φ *est bien* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *! En effet, on sait déjà que* φ *est définie sur* $\mathbb{R}$*. De plus pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,*

$$\varphi(x) = F\left(x^2\right) - F\left(|x|\right).$$

Donc φ est continue sur $\mathbb{R}$. Enfin, on observe que puisque $\ln(1+|x|) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, *on a*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varphi'(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2x\ln\left(1+x^2\right)\cos\left(2x^2\right) - \operatorname{sgn}(x)\ln(1+|x|)\cos(2x) = 0-0 = 0 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \varphi'(x).$$

Résumons,

- *φ est continue sur $\mathbb{R}$,*
- *φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$,*
- $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \varphi'(x)$ *existe dans $\mathbb{R}$.*

Donc par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, la fonction φ est $\mathscr{C}^1$ en 0 et donc sur $\mathbb{R}$ et

$$\varphi'(0) = 0.$$

5. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 5 pour la fonction $f : t \mapsto \sin(t)$ aux points $a = \pi$ (et non 0 !) et $b = x \in [\pi; +\infty[$ puis montrer que son reste est majoré en valeur absolue par $\frac{(x-\pi)^6}{6!}$.
Solution. Soit $x \in [\pi; +\infty[$. La fonction sin est $\mathscr{C}^6$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[\pi; x]$. Donc par la formule de Taylor-Lagrange,

$$\left|\sin(x) - \sum_{k=0}^{5} \sin^{(k)}(\pi)\frac{(x-\pi)^k}{k!}\right| \leqslant \sup_{z\in[\pi;x]} \left|\sin^6(z)\right| \frac{|x-\pi|^6}{120}.$$

Or,

$$\sin' = \cos, \quad \sin'' = -\sin, \quad \sin''' = -\cos, \quad \sin^{(4)} = \sin, \quad \sin^{(5)} = \cos, \quad \sin^{(6)} = -\sin$$

Donc

$$\sin'(\pi) = -1, \quad \sin''(\pi) = \sin^{(4)}(\pi) = 0, \quad \sin^{(3)}(\pi) = 1, \quad \sin^{(5)}(\pi) = -1,$$

De plus, pour tout $z \in [\pi; x]$, $\left|\sin^{(6)}(z)\right| = |-\sin(z)| \leqslant 1$. D'où

$$\left|\sin(x) - \left[-(x-\pi) + \frac{(x-\pi)^3}{6} - \frac{(x-\pi)^5}{120}\right]\right| \leqslant \frac{|x-\pi|^6}{6} = \frac{(x-\pi)^6}{6!} \quad \text{car } x \geqslant \pi.$$

Conclusion, pour tout $x \in [\pi; +\infty[$,

$$\boxed{\left|\sin(x) + (x-\pi) - \frac{(x-\pi)^3}{6} + \frac{(x-\pi)^5}{120}\right| \leqslant \frac{(x-\pi)^6}{6}.}$$