Réponses de l'interrogation 26
Intégration

1. (a) Enoncer le théorème fondamental de l'analyse.
   Solution. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}(I)$, $a \in I$ et $A \in \mathbb{R}$. Alors la fonction
   $$F: \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto A + \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \end{array}$$
   existe, est continue et même $\mathscr{C}^1$ sur I et est l'unique primitive de f sur I vérifiant $F(a) = A$.

   (b) Enoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
   Solution. Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a;b])$. Alors,
   $$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right| \leqslant \sup_{z \in [a;b]} \left| f^{(n+1)}(z) \right| \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

   (c) Enoncer le théorème sur la nature de deux séries dont les termes généraux sont équivalents.
   Solution. Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries numériques. Si
   1 $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$
   2 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant à partir d'un certain rang (ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$)

   Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sont de même nature.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   Solution. Ainsi,
   $$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\arctan\left(\frac{\pi}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2^n} \leqslant \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$
   Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2^{n+1}} = 0$. Donc par le théorème d'encadrement, on en déduit que
   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. A l'aide d'un glissement d'indice, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

   Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\tilde{k} = k - n$ i.e. $k = \tilde{k} + n$. Dès lors,
   $$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} + \frac{1}{n}.$$
   Conclusion,
   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(2).}$$

4. Déterminer le domaine de dérivabilité de $\varphi : x \mapsto \int_{|x|}^{x^2} \ln(1+t)\cos(2t)\,\mathrm{d}t$ et donner une expression de sa dérivée.
   On pourra noter $\operatorname{sgn}(x)$ *le signe de* x *valant* 1 *si* $x \geqslant 0$ *et* -1 *si* $x \leqslant 0$.
   Solution. Donc par composition et différence, φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \varphi'(x) = 2x\ln\left(1+x^2\right)\cos\left(2x^2\right) - \operatorname{sgn}(x)\ln(1+|x|)\cos(2x).}$$

5. Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 5 pour la fonction $f : t \mapsto \sin(t)$ aux points $a = \pi$ (et non 0 !) et $b = x \in [\pi; +\infty[$ puis montrer que son reste est majoré en valeur absolue par $\frac{(x-\pi)^6}{6!}$.
Solution. Conclusion, pour tout $x \in [\pi; +\infty[$,

$$\boxed{\left|\sin(x) + (x-\pi) - \frac{(x-\pi)^3}{6} + \frac{(x-\pi)^5}{120}\right| \leqslant \frac{(x-\pi)^6}{6}.}$$