Correction de l'interrogation 27
Probabilités

1. (a) Définir les trois lois usuelles.

   Solution. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle sur Ω.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit une loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$ si $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$. On note $X \sim \mathscr{U}([\![1;n]\!])$.
   - Soit $p \in [0;1]$. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0;1\}$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ et $\mathbb{P}(X = 1) = p$. On note $X \sim \mathscr{B}(p)$.
   - Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$. On dit que X suit une loi binomiale de paramètre n et p si $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. On note $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

   (b) Enoncer la formule des probabilités totales.

   Solution. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(B_k)_{k \in [\![1;p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$ un système complet d'évènements. Alors pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \mid B_k)\, \mathbb{P}(B_k).$$

   (c) Caractériser par la dimension le fait qu'une famille soit une base.

   Solution. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E. Si (au moins) deux des assertions suivantes sont vraies
   1. $\mathscr{F}$ est génératrice dans E.
   2. $\mathscr{F}$ est libre.
   3. $\operatorname{Card}(\mathscr{F}) = \dim(E)$.

   Alors $\mathscr{F}$ est une base de E.

2. On procède à l'expérience suivante :
   - On lance un dé équilibré à 4 faces.
   - On remplie une urne d'une boule verte et d'autant de boule(s) rouge(s) que le résultat retourné par le dé.
   - On pioche une boule dans l'urne.

   On admet que la probabilité d'avoir la boule verte vaut $\frac{77}{240}$. Calculer la probabilité d'avoir obtenu 1 avec le dé sachant que l'on a obtenu la boule verte.

   Solution. On note X le résultat du dé et A l'évènement « piocher une boule verte ». On cherche $\mathbb{P}(X = 1 \mid A)$. On sait que $\mathbb{P}(A) = \frac{77}{240} \neq 0$ donc la question a un sens. De plus, par la formule de Bayes, car $\mathbb{P}(A) \neq 0$,

$$\mathbb{P}(X = 1 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid X = 1)\, \mathbb{P}(X = 1)}{\mathbb{P}(A)}.$$

   Si $X = 1$, l'urne continent une boule verte et une boule rouge. Le tirage étant équiprobable entre ces deux boules, on a $\mathbb{P}(A \mid X = 1) = \frac{1}{2}$. De plus, puisque $X \sim \mathscr{U}([\![1;4]\!])$, on a $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{4}$. Enfin, par l'énoncé, $\mathbb{P}(A) = \frac{77}{240}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X = 1 \mid A) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{77}{240}} = \frac{77}{30}.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X = 1 \mid A) = \frac{30}{77}.}$$

3. On possède 2 pièces équilibrées. On les lance une première fois et on ne garde que les pièces ayant donné pile. On relance alors une seconde fois les pièces restantes. Déterminer la probabilité d'avoir obtenu un seul pile au second lancer.

   Solution. Pour tout $k \in [\![0;2]\!]$, notons X le nombre de pièces donnant pile au premier lancer et Y le nombre de pièce donnant pile au second lancer. Au premier lancer, on a
   - deux pièces ayant la même probabilité de retourner pile ($p = 1/2$),

- le résultat de chaque pièce est indépendant.

Dès lors,

$$X \sim \mathscr{B}\left(2, \frac{1}{2}\right).$$

On cherche $\mathbb{P}(Y=1)$. Puisque $(X=k)_{k\in[\![0;2]\!]}$, par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(Y=1) = \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(Y=1 \mid X=k)\,\mathbb{P}(X=k).$$

Puisque $X \sim \mathscr{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=1) &= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1-\frac{1}{2}\right)^{2-k} \mathbb{P}(Y=1 \mid X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^{2-k}} \mathbb{P}(Y=1 \mid X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} \frac{1}{2^2} \mathbb{P}(Y=1 \mid X=k) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} \mathbb{P}(Y=1 \mid X=k).
\end{aligned}$$

Si $k=0$, on ne relance aucune pièce au second lancer, impossible alors d'avoir pile : $\mathbb{P}(Y=1 \mid X=0)=0$.
Si $k=1$, on ne lance qu'une seule pièce au second lancer : $\mathbb{P}(Y=1 \mid X=1)=\frac{1}{2}$
Si $k=2$, on en lance deux : $\mathbb{P}(Y=1 \mid X=2)=\binom{2}{1}\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Par conséquent,

$$\mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{4}\left(0 + 2\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(Y=1) = \frac{3}{8}.}$$

4. On lance à trois reprises trois pièces équilibrées. Au premier lancer, on lance les trois pièces puis à chaque lancer, on ne relance que les pièces ayant donné pile au lancer précédent. Déterminer la probabilité de perdre une pièce à chaque étape et ne plus avoir aucune pièce à la fin du troisième tirage.
Solution. On pose pour tout $k \in [\![1;3]\!]$, X_k le nombre de piles obtenus au lancer numéro k. On cherche

$$\mathbb{P}(X_1=2, X_2=1, X_3=0).$$

Par la formule des probabilités composées, on obtient,

$$\mathbb{P}(X_1=2, X_2=1, X_3=0) = \mathbb{P}(X_1=2)\,\mathbb{P}(X_2=1 \mid X_1=2)\,\mathbb{P}(X_3=0 \mid X_1=2, X_2=1).$$

Or on lance trois pièces identiques et on suppose les résultats des pièces indépendants. Alors,

$$X_1 \sim \mathscr{B}\left(3, \frac{1}{2}\right).$$

Donc $\mathbb{P}(X_1=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$. Puis de même, si l'on sait que l'on en lance deux, on a

$$\mathbb{P}(X_2=1 \mid X_1=2) = \binom{2}{1}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Enfin, si on ne lance plus qu'une pièce,

$$\mathbb{P}(X_3=0 \mid X_1=2, X_2=1) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_1=2, X_2=1, X_3=0) = \frac{3}{8}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{32}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1=2, X_2=1, X_3=0) = \frac{3}{32}.}$$

5. Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X=k)$	a	$1/12$	0	$1/4$	$5/12$	$1/6$

Les deux questions sont indépendantes.

(a) Déterminer a.

(b) On note A l'évènement « X est pair » et $B=(X\geqslant 4)$. Déterminer si A et B sont indépendants ou non.

Solution.

(a) La famille $(X=k)_{k\in[\![1;6]\!]}$ forme un système complet d'évènements. Donc

$$1=\sum_{k=1}^{6}\mathbb{P}(X=k)=a+\frac{1}{12}+0+\frac{1}{4}+\frac{5}{12}+\frac{1}{6}=a+\frac{1+3+5+2}{12}=a+\frac{11}{12}\qquad\Leftrightarrow\qquad a=1-\frac{11}{12}=\frac{1}{12}.$$

Conclusion,

$$\boxed{a=\frac{1}{12}.}$$

(b) On observe que $A=(X=2)\cup(X=4)\cup(X=6)$. Les évènements étant disjoints,

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=4)+\mathbb{P}(X=6)=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1+3+2}{12}=\frac{1}{2}.$$

D'autre part, $B=(X\geqslant 4)=(X=4)\cup(X=5)\cup(X=6)$. Donc les évènements étant disjoints,

$$\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(X=4)+\mathbb{P}(X=5)+\mathbb{P}(X=6)=\frac{1}{4}+\frac{5}{12}+\frac{1}{6}=\frac{3+5+2}{12}=\frac{5}{6}.$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)=\frac{1}{2}\frac{5}{6}=\frac{5}{12}.$$

Enfin, on a $(A\cap B)=(X=4)\cup(X=6)$. Donc

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(X=4)+\mathbb{P}(X=6)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3+2}{12}=\frac{5}{6}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{Les évènements } A \text{ et } B \text{ sont indépendants.}}$$