Réponses de l'interrogation 28
Représentation matricielle

1. (a) Donner la matrice d'une composition.
Solution. Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B}_E$ une base de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F, $\mathscr{B}_G$, une base de G, $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors,
$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f) = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g)\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f).$$
(b) Caractériser l'inversibilité d'une matrice.
Solution. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :
   - $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
   - $\operatorname{Ker}(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$
   - $\operatorname{Im}(A) = \mathbb{K}^n$
   - $\operatorname{rg}(A) = n$.

   (c) Enoncer le théorème fondamental de l'arithmétique.
Solution. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, il existe $d \in \mathbb{N}^*$ un entier, $p_1, \dots, p_d$ des nombres premiers, $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in (\mathbb{N}^*)^d$ des entiers naturels non nuls tels que
$$n = \prod_{i=1}^{d} p_i^{\alpha_i}.$$
De plus cette décomposition est unique.

2. Soient $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(1)X^2 + P'(1)X + P''(1) \end{array}$ et $\mathscr{C} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Calculer $\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f)$.
Solution. Par conséquent, on obtient que
$$\boxed{\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

3. Soit $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $e_1 = (3,1)$, $e_2 = (-2,5)$, $\mathscr{B}_1 = (e_1, e_2)$, $e_1' = (2,1)$ et $e_2' = (1,-1)$ et $\mathscr{B}_2 = (e_1', e_2')$. Justifier que $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont deux bases de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$.
Solution. Les vecteurs e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires donc $\mathscr{B}_1$ est libre et $\operatorname{Card}(\mathscr{B}_1) = \dim(\mathbb{R}^2)$ donc $\boxed{\mathscr{B}_1 \text{ est une base de } \mathbb{R}^2}$. De même $\boxed{\mathscr{B}_2 \text{ est aussi une base de } \mathbb{R}^2}$.
Conclusion,
$$\boxed{P_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.}$$

4. On considère $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ définit pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par
$$f(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}(x - 2y - 6z), \frac{1}{3}(-x + 2y - 3z), \frac{1}{3}(-x - y)\right).$$
On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et $\mathscr{B} = ((1,-1,0),(3,0,-1),(2,1,1))$. On admet que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On donne $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
Solution. Conclusion,
$$\boxed{D = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$
On note alors que $D^2 = D$ i.e. $f \circ f = f$. L'application f est une symétrie. Mieux ! Par lecture de la matrice D, f est une symétrie sur Vect(e_1, e_2) *parallèlement à* Vect(e_3).

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associé à A. Déterminer $\mathrm{Im}\,(A)$ et en déduire $\mathrm{rg}\,(A)$ et $\mathrm{Ker}\,(A)$.
Solution. Ainsi,

$$\boxed{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \text{ forme une base de } \mathrm{Im}\,(A).}$$

En particulier,

$$\boxed{\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{Card}\,(C_1, C_2) = 2.}$$

Par le théorème du rang, on en déduit que

$$\dim\left(\mathrm{Ker}\,(A)\right) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) - \mathrm{rg}\,(A) = 3 - 2 = 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ forme une base de } \mathrm{Ker}\,(A).}$$