# Correction de l'interrogation 02
# Fonctions réelles

1. (a) Définir l'image et l'image réciproque d'un ensemble par une fonction.
   *Solution.* Soient $U \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{F}(U, \mathbb{R})$, $A \subseteq U$ et $B \subseteq \mathbb{R}$.
   - L'image directe de $A$ par $f$ est
   $$f(A) = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A,\ y = f(x) \}.$$
   - L'image réciproque de $B$ par $f$ est
   $$f^{\leftarrow}(B) = \{ x \in U \mid f(x) \in B \}.$$

   (b) Définir une fonction croissante et une fonction strictement décroissante.
   *Solution.* Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que $f$ est croissante sur $I$ si
   $$\forall (x,y) \in I^2, \qquad [(x \leqslant y) \quad \Rightarrow \quad (f(x) \leqslant f(y))].$$
   $f$ est strictement décroissante sur $I$ si
   $$\forall (x,y) \in I^2, \qquad [(x < y) \quad \Rightarrow \quad (f(x) > f(y))].$$

2. Soit $f : x \mapsto \left(e^{\sin(x)} - e^{-\sin(x)}\right) \ln\left(x^4 - x^2 - 12\right)$. Déterminer l'ensemble de définition de $f$ ainsi que sa parité.
   *Solution.* Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
   $$f(x) \text{ existe} \qquad \Leftrightarrow \qquad x^4 - x^2 - 12 > 0.$$
   Posons $X = x^2$. On a alors,
   $$f(x) \text{ existe} \qquad \Leftrightarrow \qquad X^2 - X - 12 > 0.$$
   Soit $\Delta$ le discriminant de $X^2 - X - 12$. On a $\Delta = 1 + 48 = 49$. Donc les racines associées sont $\frac{1-7}{2} = -3$ et $\frac{1+7}{2} = 4$. D'où
   $$X^2 - X - 12 = (X+3)(X-4) = \left(x^2+3\right)\left(x^2-4\right) = \left(x^2+3\right)(x-2)(x+2).$$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 + 3 > 0$ et

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x+2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x^4-x^2-12$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

   Conclusion, l'ensemble de définition de $f$ est
   $$\boxed{\mathcal{D} = ]-\infty; -2[ \cup ]2; +\infty[\,.}$$
   Premièrement, on constate que $\mathcal{D}$ est centré en 0. De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}$,
   $$\begin{aligned} f(-x) &= \left(e^{\sin(-x)} - e^{-\sin(-x)}\right) \ln\left((-x)^4 - (-x)^2 - 12\right) \\ &= \left(e^{-\sin(x)} - e^{\sin(x)}\right) \ln\left(x^4 - x^2 - 12\right) \qquad \text{par imparité de la fonction sinus} \\ &= -\left(e^{\sin(x)} - e^{-\sin(x)}\right) \ln\left(x^4 - x^2 - 12\right) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$
   Conclusion,
   $$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire.}}$$

3. Montrer que l'équation $\sqrt{x} - \sqrt{2x-4} = 1$ admet une solution sur $[2;+\infty[$.
*Solution.* Soit $f : x \mapsto \sqrt{x} - \sqrt{2x-4} - 1$. Pour tout $x \geqslant 2$, on a $x \geqslant 0$ et $2x - 4 \geqslant 4 - 4 = 0$. Donc $f$ est bien définie et même continue sur $[2;+\infty[$. De plus, on a

$$f(2) = \sqrt{2} - \sqrt{4-4} - 1 = \sqrt{2} - 1 > 0 \qquad \text{et} \qquad f(4) = 2 - \sqrt{8-4} - 1 = 1 - 2 = -1 < 0.$$

Donc $f$ est continue sur $[2;4]$ et $0 \in [f(4); f(2)]$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in [2;4]$ tel que $f(a) = 0$ i.e. $\sqrt{a} - \sqrt{2a-4} = 1$. Conclusion,

$$\boxed{\text{l'équation } \sqrt{x} - \sqrt{2x-4} = 1 \text{ admet une solution sur } [2;+\infty[.}$$

4. Donner le tableau de variations de $f : x \mapsto \frac{x^2}{x-1}$ sur son domaine de définition.
*Solution.* La fonction $f$ est définie et même dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ en tant que quotient de fonction polynomiale dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

De plus,

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$,

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{x}{1 - \frac{1}{x}}.$$

Donc

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1 - \frac{1}{x}} = -\infty.$$

De même,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1 - \frac{1}{x}} = +\infty.$$

Aussi, $f(0) = 0$, $f(2) = \frac{4}{2-1} = 4$ et

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Conclusion, on en déduit le tableau de variation suivant

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty \;\Vert\; +\infty$ | $\searrow$ | $4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la dérivée $n$-ième de $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$.
*Solution.* La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \qquad f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}.$$

On observe alors que $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \qquad f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

La fonction $f$ est trois fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \qquad f^{(3)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4}.$$

La fonction $f$ est quatre fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \qquad f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x+1)^5}.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } f \text{ est } n\text{-fois dérivable sur } \mathbb{R} \setminus \{-1\} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}} \text{ »}.$$

Procédons par récurrence.
*Initialisation.* Si $n = 0$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \qquad f^{(0)}(x) = f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \qquad \text{et} \qquad (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}} = (-1)^0 \frac{0!}{(x+1)^1} = \frac{1}{x+1}.$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
*Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ : $f$ est $n$-fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}.$$

La fonction $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ puisque son dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Donc $f$ est $(n+1)$-fois dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}, \qquad f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left((-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}\right)' = -(-1)^n n! \frac{(n+1)}{(x+1)^{n+2}} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
*Conclusion,* pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie : $\boxed{f \text{ est } n\text{-fois dérivable sur } \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}.}$$