Correction de l'interrogation 30
Révisions

1. (a) Donner la définition d'une suite extraite. Quand est-ce qu'une suite extraite converge-t-elle ?
Solution. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Si φ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$ alors la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite ou encore une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ également et vers la même limite.

(b) Enoncer le théorème de la base adaptée.
Solution. Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F et $\mathscr{B}_G$ une base de G. On pose $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$. Alors,
   - $F \cap G = \{0_E\} \iff \mathscr{B}$ est libre.
   - $F + G = E \iff \mathscr{B}$ est génératrice dans E.
   - $F \oplus G = E \iff \mathscr{B}$ est une base de E.

(c) Donner la forme explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dans le cas où $\Delta < 0$.
Solution. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Soit Δ le discriminant de (E_c) : $r^2 - ar - b$. Si $\Delta < 0$, alors en notant $r_1 = r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}$ et $r_2 = r\,\mathrm{e}^{-i\,\theta}$ les deux racines complexes de (E_c),

$$\exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = r^n\left(\lambda \cos(n\,\theta) + \mu \sin(n\,\theta)\right).$$

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_n^{n+1} \sqrt{3t^2+1}\,\mathrm{d}t$. Déterminer la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Solution. La fonction $t \mapsto \sqrt{3t^2+1}$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [n; n+1]$, on a

$$\sqrt{3n^2+1} \leqslant \sqrt{3t^2+1} \leqslant \sqrt{3(n+1)^2+1} = \sqrt{3n^2+6n+4}.$$

Donc par croissance de l'intégrale, car $n+1 \geqslant n$, on a

$$\begin{aligned} & \int_n^{n+1} \sqrt{3n^2+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \sqrt{3t^2+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \sqrt{3n^2+6n+4}\,\mathrm{d}t \\ \iff \qquad & \sqrt{3n^2+1} \leqslant I_n \leqslant \sqrt{3n^2+6n+4}. \end{aligned}$$

Donc par le théorème de minoration, on en déduit que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty.}$$

Bonus : On remarque également que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\sqrt{3n^2+1}}{\sqrt{3}n} = \sqrt{1+\frac{1}{3n^2}} \leqslant \frac{I_n}{\sqrt{3}n} \leqslant \frac{\sqrt{3n^2+6n+4}}{\sqrt{3}n} = \sqrt{1+\frac{6n+4}{3n^2}}.$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{3n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{6n+4}{3n^2}} = 1.$$

Donc par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{\sqrt{3}n} = 1.$$

Ainsi,

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{3}n.$$

3. Calculer un développement à l'ordre 2 en 0 de $f : x \mapsto \frac{1}{3+x} + \ln(3+x)$.

Solution. On a les égalités asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x}{3}} + \ln(3) + \ln\left(1+\frac{x}{3}\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3}\left(1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}+o\left(x^2\right)\right) + \ln(3) + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{2\times 9} + o\left(x^2\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3} + \ln(3) + \frac{2x}{9} + \frac{(2-3)\,x^2}{2\times 3\times 9} + o\left(x^2\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3} + \ln(3) + \frac{2x}{9} - \frac{x^2}{54} + o\left(x^2\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3} + \ln(3) + \frac{2x}{9} - \frac{x^2}{54} + o\left(x^2\right).}$$

4. Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ on considère la famille $\mathscr{F} = \left(f_k : x \mapsto \cos\left(x + k\frac{\pi}{4}\right)\right)_{k\in[\![0;4]\!]}$. Calculer le rang de $\mathscr{F}$.

Solution. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)\\
f_2(x) &= \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)\\
f_3(x) &= \cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)\\
f_4(x) &= \cos(x+\pi) = -\cos(x).
\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(\mathscr{F}) &= \mathrm{rg}\left(\cos, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin, -\sin, -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin, -\cos\right)\\
&= \mathrm{rg}\left(\cos, 0_E, -\sin, 0_E, x\mapsto 0_E\right) \qquad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}C_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}C_3\\ C_4 \leftarrow C_4 + \frac{\sqrt{2}}{2}C_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}C_3\\ C_5 \leftarrow C_5 + C_1 \end{array}\\
&= \mathrm{rg}(\cos, -\sin)\\
&= \mathrm{rg}(\cos, \sin) \qquad C_2 \leftarrow -C_2.
\end{aligned}$$

Or les fonctions cos et sin ne sont pas colinéaires donc $(\cos, \sin)$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = 2.}$$

5. On considère la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0\\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Démontrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$.

Solution. Posons $I =]-1;+\infty[$. La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $I \setminus \{0\}$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. Montrons que f est continue en 0. On a

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Dès lors, pour tout $x \in I \setminus \{0\}$,

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\sim} \frac{x}{x} = 1.$$

Par conséquent,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 1 = f(0).$$

Donc la fonction f est continue en 0 et donc sur I.
De plus, pour tout $x \in I \setminus \{0\}$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}x - \ln(1+x)}{x^2}.$$

On obtient donc,

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} \frac{(1-x+o(x))\,x-\left(x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)}{x^2}\\
&\underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} \frac{x-x^2+o\left(x^2\right)-\left(x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)}{x^2}\\
&\underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} \frac{-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}{x^2}\\
&\underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} -\frac{1}{2}+o\left(1\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x)$ existe et vaut $-\frac{1}{2}$. En résumé,

- f est $\mathscr{C}^1$ sur $I\setminus\{0\}$,
- f est continue sur I,
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x)$ existe et vaut $-\frac{1}{2}$.

Par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, on en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ en } 0 \text{ et donc sur } I \text{ et } f'(0)=-1/2.}$$