Correction de l'interrogation 31
Géométrie du plan

1. (a) Donner la définition d'un déterminant sur $(\mathbb{R}^n)^n$.
Solution. Le déterminant est l'unique application det de $(\mathbb{R}^n)^n$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $(C_1, \ldots, C_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
   i. *(n-linéarité)* $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $\forall C_i' \in \mathbb{R}^n$,
$$\det(C_1, \ldots, \lambda C_i + \mu C_i', \ldots, C_n) = \lambda \det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n) + \mu \det(C_1, \ldots, C_i', \ldots, C_n).$$
   ii. *(alternance)* $\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, $i \neq j$, on a
$$\det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n) = -\det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_n).$$
   iii. *(normalisation)* Si $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\det(\mathscr{C}) = 1$.

   (b) Donner les formules géométriques du produit scalaire et du déterminant dans le plan.
Solution. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors,
$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$
$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$$

   (c) Enoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
Solution. Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a; b])$. Alors,
$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leqslant \sup_{z \in [a;b]} \left| f^{(n+1)}(z) \right| \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. Déterminer une équation cartésienne et des équations paramétriques de la tangente $\mathcal{T}$ au cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ au point $A(3, 1)$.
Solution. On observe que si $x = 3$ et $y = 1$, alors $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 9 + 1 - 12 + 2 = 0$. Donc le point A est bien un point du cercle : $A \in \mathscr{C}$. Par définition de $\mathcal{T}$, $A \in \mathcal{T}$. De plus, soit $M(x, y) \in \mathscr{P}$. On a
$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + y^2 + 2y = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + (y+1)^2 = 5. \end{aligned}$$
Donc $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\Omega(2, -1)$ (et de rayon $\sqrt{5}$). Donc $\vec{n} = \overrightarrow{\Omega A}$ est un vecteur normal à $\mathcal{T}$. On a
$$\overrightarrow{\Omega A} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \overrightarrow{\Omega A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
Soit $M(x, y) \in \mathscr{P}$. On a
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{T} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{\Omega A} \\ &\Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{bmatrix} x-3 \\ y-1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x - 3 + 2y - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x + 2y - 5 = 0 \end{aligned}$$
Conclusion, une équation cartésienne de $\mathcal{T}$ est
$$\boxed{\mathcal{T} : \quad x + 2y - 5 = 0.}$$
De plus, puisque $\overrightarrow{\Omega A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est normal à $\mathcal{T}$, alors, $\vec{u} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{T}$. Conclusion, des équations paramétriques de $\mathcal{T}$ sont données par,
$$\boxed{\mathcal{T} : \quad \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.}$$

3. Soient $A\,(6,2)$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $2x+y-9=0$. Déterminer la distance de A à $\mathcal{D}$ et déterminer le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.

   Solution. On note que $\vec{n}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$ et que $B\,(0,9)$ est un point de $\mathcal{D}$. Soit H le projeté de A sur $\mathcal{D}$. On a

$$\begin{aligned} H &= A + \frac{\left\langle \overrightarrow{AB} \middle| \vec{n} \right\rangle \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \\ &= \begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix} + \frac{\left\langle \begin{bmatrix}-6\\7\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \right\rangle}{(4+1)} \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix} + \frac{-5}{5}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

   De là, on en déduit également que

$$d\,(A,\mathcal{D}) = \left\|\overrightarrow{AH}\right\| = \left\| \begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix} \right\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

   Conclusion,

$$\boxed{H\,(4,1) \quad \text{et} \quad d\,(A,\mathcal{D}) = \sqrt{5}.}$$

4. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre $\Omega\,(11,b)$. Déterminer les coordonnées de Ω pour que $\mathcal{C}$ soit tangent aux droites $\mathcal{D}_1$: $2x-y+1=0$ et $\mathcal{D}_2 : 2x+y-7$.

   Solution. On note que $\vec{n}_1\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}_1$ et $A_1\,(0,1)$ est un point de $\mathcal{D}_1$. Dès lors,

$$\begin{aligned} d_1 = d\,(\Omega,\mathcal{D}_1) &= \left\| \frac{\left\langle \overrightarrow{\Omega A_1} \middle| \vec{n}_1 \right\rangle \vec{n}_1}{\|\vec{n}_1\|^2} \right\| \\ &= \frac{\left| \left\langle \overrightarrow{\Omega A_1} \middle| \vec{n}_1 \right\rangle \right|}{\|\vec{n}_1\|} \\ &= \frac{\left| \left\langle \begin{bmatrix}-11\\1-b\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} \right\rangle \right|}{\sqrt{4+1}} \\ &= \frac{|-22-1+b|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5}\,|b-23|\,. \end{aligned}$$

   De même, $\vec{n}_2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}_2$ et $A_2\,(3,1)$ est un point de $\mathcal{D}_2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} d_2 = d\,(\Omega,\mathcal{D}_2) &= \frac{\left| \left\langle \begin{bmatrix}-8\\1-b\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \right\rangle \right|}{\sqrt{4+1}} \\ &= \frac{|-16+1-b|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5}\,|b+15|\,. \end{aligned}$$

   Les deux distances sont donc données par

$$d_1 = d\,(\Omega,\mathcal{D}_1) = \frac{\sqrt{5}}{5}\,|b-23|\,, \quad d_2 = d\,(\Omega,\mathcal{D}_2) = \frac{\sqrt{5}}{5}\,|b+15|\,, \quad d_3 = d\,(\Omega,\mathcal{D}_3) = \frac{\sqrt{5}}{5}\,|11+2b|\,.$$

Pour que Ω soit le centre du cercle tangent à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, il faut que

$$\begin{aligned}
d_1 = d_2 \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{5}}{5}\,|b-23| = \frac{\sqrt{5}}{5}\,|b+15| \\
& \Leftrightarrow \quad |b-23| = |b+15| \\
& \Leftrightarrow \quad b-23 = b+15 \ \text{ OU } \ b-23 = -b-15 \\
& \Leftrightarrow \quad -23 = 15 \text{ impossible } \ \text{OU} \ \ 2b = 8 \\
& \Leftrightarrow \quad b = 4.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\Omega\,(11,4)\,.}$$

5. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\varphi : (P,Q) \mapsto \sup_{x\in[0;1]} P(x)Q(x)$ existe sur E^2 et définit un produit scalaire sur E.

Solution. **Cette question est fausse !** Soient $(P,Q) \in E^2$. Puisque P et Q sont deux polynômes, alors $x \mapsto P(x)$ et $x \mapsto Q(x)$ sont deux fonctions polynomiales et donc notamment sont deux fonctions continues sur $[0;1]$. Donc $x \mapsto P(x)Q(x)$ est continue sur $[0;1]$. Donc par le théorème des bornes atteintes, $x \mapsto P(x)Q(x)$ est bornée sur $[0;1]$ (et atteint ses bornes), en particulier admet un maximum. Donc $\varphi\,(P,Q) = \sup_{x\in[0;1]} P(x)Q(x)$ existe et même $\varphi\,(P,Q) = \max_{x\in[0;1]} P(x)Q(x)$. Ceci étant vrai pour tout $(P,Q) \in E^2$,

$$\boxed{\varphi \text{ est bien définie sur } E^2.}$$

Soient $(P,Q,R) \in E^3$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,

- *(symétrie)*
$$\varphi\,(P,Q) = \sup_{x\in[0;1]} P(x)Q(x) = \sup_{x\in[0;1]} Q(x)P(x) = \varphi\,(Q,P)\,.$$
- *(NON - bilinéarité)* La bilinéarité ne fonctionne pas ici car
$$\varphi\,(\lambda\,P + \mu Q, R) \neq \lambda\,\varphi\,(P,R) + \mu\,\varphi\,(Q,R)\,.$$
Exemple, $Q = 0$, $R = 1$, $P = X^2$ et $\lambda = -1$. Alors,
$$\varphi\,(\lambda\,P + \mu Q, R) = \varphi\left(-X^2, 1\right) = \sup_{x\in[0;1]} \left(-x^2\right) = 0.$$
Or
$$\lambda\,\varphi\,(P,R) + \mu\,\varphi\,(Q,R) = -\,\varphi\left(X^2,1\right) = -\sup_{x\in[0;1]}\left(x^2\right) = -1.$$
- *(positive)*
$$\varphi\,(P,P) = \sup_{x\in[0;1]} (P(x))^2\,.$$
Pour tout $x \in [0;1]$, on a $(P(x))^2 \geqslant 0$. Donc $\sup_{x\in[0;1]} (P(x))^2 \geqslant 0$. Ainsi,
$$\varphi\,(P,P) \geqslant 0.$$
- *(définie)* Supposons $\varphi\,(P,P) = 0$ alors $\sup_{x\in[0;1]} (P(x))^2 = 0$. Donc
$$\forall x \in [0;1]\,, \qquad 0 \leqslant (P(x))^2 \leqslant \sup_{t\in[0;1]} (P(t))^2 = 0.$$
Nécessairement, $\forall x \in [0;1]$, $P(x) = 0$. Donc P admet une infinité de racines. Conclusion,
$$P = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E = \mathbb{R}[X].}$$