Correction de l'interrogation 32
Géométrie de l'espace

1. (a) Donner la définition d'un déterminant sur $(\mathbb{R}^n)^n$.

   Solution. Le déterminant est l'unique application det de $(\mathbb{R}^n)^n$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $(C_1, \ldots, C_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

   i. *(n-linéarité)* $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $\forall C'_i \in \mathbb{R}^n$,
   $$\det(C_1, \ldots, \lambda C_i + \mu C'_i, \ldots, C_n) = \lambda \det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n) + \mu \det(C_1, \ldots, C'_i, \ldots, C_n).$$

   ii. *(alternance)* $\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, $i \neq j$, on a
   $$\det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n) = -\det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_n).$$

   iii. *(normalisation)* Si $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\det(\mathscr{C}) = 1$.

   (b) Définir le produit vectoriel.

   Solution. Le produit vectoriel $\cdot \wedge \cdot$ est l'unique application de $\left(\mathbb{R}^3\right)^2$ dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant pour tout $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u'}, \vec{v'}\right) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^4$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

   - *(bilinéarité)* $\left(\lambda \vec{u} + \mu \vec{u'}\right) \wedge \vec{v} = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v} + \mu \vec{u'} \wedge \vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \left(\lambda \vec{v} + \mu \vec{v'}\right) = \lambda \vec{u} \wedge \vec{v} + \mu \vec{u} \wedge \vec{v'}$.
   - *(anti-symétrie)* $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.
   - Si $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\vec{e_1} \wedge \vec{e_2} = \vec{e_3}$, $\vec{e_2} \wedge \vec{e_3} = \vec{e_1}$ et $\vec{e_3} \wedge \vec{e_1} = \vec{e_2}$.

   (c) Définir les deux types d'indépendance pour une famille d'évènements.

   Solution. Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$ et $(A_i)_{i \in [\![1:p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$.

   i. On dit que les $(A_i)_{i \in [\![1:p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$ sont indépendants deux à deux si et seulement si
   $$\forall (i, j) \in [\![1; p]\!]^2,\ i \neq j, \qquad \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j).$$

   ii. On dit que les $(A_i)_{i \in [\![1:p]\!]} \in \mathscr{P}(\Omega)^p$ sont indépendants si et seulement si
   $$\forall J \subseteq [\![1; p]\!], \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i).$$

2. Soient $A(1, 2, 3)$, $B(2, -1, 2)$ et $C(0, 1, -2)$. Déterminer des équations paramétriques et cartésiennes de $\mathcal{D} = (AB)$ et $\mathcal{P} = (ABC)$.

   Solution. On note que $\overrightarrow{AB} \begin{bmatrix} 2-1 \\ -1-2 \\ 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $A(1, 2, 3)$ un point de $\mathcal{D}$. Des équations paramétriques de $\mathcal{D}$ sont donc données par
   $$\boxed{\mathcal{D} : \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.}$$

Méthode 1. Soit $M\,(x,y,z) \in \mathscr{E}$. On a

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{AB}\\
&\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x-1\\ y-2\\ z-3\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1\\ -3\\ -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -y+2+3z-9=0\\ z-3+x-1=0\\ -3x+3-y+2=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y-3z+7=0\\ x+z-4=0\\ 3x+y-5=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y-3z+7=0\\ x+z-4=0\\ y-3z+7=0\end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y-3z+7=0\\ x+z-4=0\end{cases} \qquad \text{car } L_2 = L_3.
\end{aligned}$$

Conclusion des équations cartésiennes de $\mathcal{D}$ sont données par

$$\boxed{\mathcal{D} : \begin{cases} y-3z+7=0\\ x+z-4=0.\end{cases}}$$

Méthode 2. De plus, $\overrightarrow{n_1}\begin{bmatrix} 3\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$. Puis,

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{n_1} = \begin{bmatrix} 1\\ -3\\ -1\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 3\\ 1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\ -3\\ 10\end{bmatrix}.$$

Donc $\overrightarrow{n_2}\begin{bmatrix} 1\\ -3\\ 10\end{bmatrix}$ est un autre vecteur normal à $\mathcal{D}$ qui n'est pas colinéaire à $\mathcal{D}$. Soit $M\,(x,y,z) \in \mathscr{E}$. On a

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{D} \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \text{ est normal à } \overrightarrow{n_1} \text{ et à } \overrightarrow{n_2}.\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \overrightarrow{n_1} \right\rangle = 0\\ \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \overrightarrow{n_2} \right\rangle = 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left\langle \begin{bmatrix} x-1\\ y-2\\ z-3\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 3\\ 1\\ 0\end{bmatrix} \right\rangle = 0\\ \left\langle \begin{bmatrix} x-1\\ y-2\\ z-3\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1\\ -3\\ 10\end{bmatrix} \right\rangle = 0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x-3+y-2=0\\ x-1-3y+6+10z-30=0\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x+y-5=0\\ x-3y+10z-25=0.\end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion des équations cartésiennes de $\mathcal{D}$ sont données par

$$\boxed{\mathcal{D} : \begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ x - 3y + 10z - 25 = 0 \end{cases}}$$

NB : si l'on souhaite retrouver les équations précédentes :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ x - 3y + 10z - 25 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 10y - 30z + 70 = 0 \\ x - 3y + 10z - 25 = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y - 3z + 7 = 0 \\ x - 3y + 10z - 25 = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{10} L_1 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y - 3z + 7 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1.
\end{aligned}$$

Méthode 3. Soit $M(x, y, z) \in \mathscr{E}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - t \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ t = 3 - z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 1 + 3 - z \\ y = 2 - 9 + 3z \\ t = 3 - z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + z - 4 = 0 \\ y - 3z + 7 = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion des équations cartésiennes de $\mathcal{D}$ sont données par

$$\boxed{\mathcal{D} : \begin{cases} y - 3z + 7 = 0 \\ x + z - 4 = 0. \end{cases}}$$

Pour le plan $\mathcal{P} = (ABC)$. On observe que $A(1, 2, 3) \in \mathcal{P}$ et que $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$ ou plutôt $\vec{v} = -\overrightarrow{AC} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$ non colinéaires. Ainsi, des équations paramétriques de $\mathcal{P}$ sont données par

$$\boxed{\mathcal{P} : \quad \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 2 - 3t + s \\ z = 3 - t + 5s \end{cases} \quad , \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2.}$$

Méthode 1. De plus, on a

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ou encore $\vec{n}\begin{bmatrix}7\\3\\-2\end{bmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$. Soit $M(x,y,z)\in\mathscr{E}$. On a

$$\begin{array}{rcl}
M\in\mathcal{P} & \Leftrightarrow & \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{n}\right\rangle = 0\\
& \Leftrightarrow & \left\langle \begin{bmatrix}x-1\\y-2\\z-3\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}7\\3\\-2\end{bmatrix}\right\rangle = 0\\
& \Leftrightarrow & 7x-7+3y-6-2z+6=0\\
& \Leftrightarrow & 7x+3y-2z-7=0.
\end{array}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donnée par

$$\boxed{\mathcal{P} : 7x+3y-2z-7=0.}$$

Méthode 2. Soit $M(x,y,z)\in\mathscr{E}$. On a

$$\begin{array}{rcll}
M\in\mathcal{P} & \Leftrightarrow & \overrightarrow{AM},\ \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont coplanaires} & \\
& \Leftrightarrow & \det\left(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v}\right)=0 & \\
& \Leftrightarrow & \begin{vmatrix}x-1 & 1 & 1\\ y-2 & -3 & 1\\ z-3 & -1 & 5\end{vmatrix}=0 & \\
& \Leftrightarrow & \begin{vmatrix}x-1 & 1 & 0\\ y-2 & -3 & 4\\ z-3 & -1 & 6\end{vmatrix}=0 & C_3\leftarrow C_3-C_2\\
& \Leftrightarrow & 2\begin{vmatrix}x-1 & 1 & 0\\ y-2 & -3 & 2\\ z-3 & -1 & 3\end{vmatrix}=0 & \\
& \Leftrightarrow & 2\begin{vmatrix}x-1 & 1 & 0\\ y-2 & -3 & 2\\ z-y-1 & 2 & 1\end{vmatrix}=0 & L_3\leftarrow L_3-L_2\\
& \Leftrightarrow & 2\begin{vmatrix}x-1 & 1 & 0\\ 3y-2z & -7 & 0\\ z-y-1 & 2 & 1\end{vmatrix}=0 & L_2\leftarrow L_2-2L_3\\
& \Leftrightarrow & 2\begin{vmatrix}x-1 & 1\\ 3y-2z & -7\end{vmatrix}=0 & \\
& \Leftrightarrow & 2\left(-7x+7-3y+2z\right)=0 & \\
& \Leftrightarrow & 7x+3y-2z-7=0. &
\end{array}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donnée par

$$\boxed{\mathcal{P} : 7x+3y-2z-7=0.}$$

Méthode 3. Soit $M(x,y,z) \in \mathscr{E}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{P} \quad & \Leftrightarrow \quad \exists (t,s) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 2 - 3t + s \\ z = 3 - t + 5s \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists (t,s) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} t + s = x - 1 \\ 3t - s = 2 - y \\ t - 5s = 3 - z \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists (t,s) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} t + s = x - 1 \\ -4s = 2 - y - 3x + 3 \\ -6s = 3 - z - x + 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists (t,s) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} t + s = x - 1 \\ -12s = -9x - 3y + 15 \\ -12s = -2x - 2z + 8 \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 3L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 \end{matrix} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists (t,s) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} t + s = x - 1 \\ -12s = -9x - 3y + 15 \\ 0 = 7x + 3y - 2z - 7 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
& \Leftrightarrow \quad \exists (t,s) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} t = x - 1 - s = \frac{x-y-9}{4} \\ s = \frac{3x+y-5}{4} \\ 0 = 7x + 3y - 2z - 7 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad 7x + 3y - 2z - 7 = 0.
\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est donnée par

$$\boxed{\mathcal{P} : 7x + 3y - 2z - 7 = 0.}$$

3. Soit $\mathcal{D} : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - y - 3z = 2 \end{cases}$. Déterminer H le projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$ et la distance de $O(0,0,0)$ à $\mathcal{D}$.

Solution. Soit $M(x,y,z) \in \mathcal{E}$, on a

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{D} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - y - 3z = 2 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y - z = 0 \\ y - z = 2 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = y + z = 2 + 2z \\ y = 2 + z \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}.
\end{aligned}$$

Donc $\vec{u}(2,1,1)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $A(2,2,0)$ un point de $\mathcal{D}$.

Méthode 1. On calcule directement H et on en déduit la distance :

$$\begin{aligned}
H &= A + \left\langle \overrightarrow{AO} \middle| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\rangle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{4+1+1}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{4+1+1}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{-4-2}{6} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{H\,(0,1,-1)\,.}$$

Puis,

$$d\,(O,\mathcal{D}) = OH = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{d\,(O,\mathcal{D}) = \sqrt{2}.}$$

Méthode 2 pour la distance. Dans le triangle rectangle AOH, on sait que $\left|\sin\left(\overrightarrow{AO},\vec{u}\right)\right| = \frac{HO}{AO}$. Autrement dit,

$$d\,(O,\mathcal{D}) = HO = AO\left|\sin\left(\overrightarrow{AO},\vec{u}\right)\right| = \frac{\left\|\overrightarrow{AO}\right\|\|\vec{u}\|\left|\sin\left(\overrightarrow{AO},\vec{u}\right)\right|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{AO}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

D'où,

$$d\,(O,\mathcal{D}) = \frac{\left\|\overrightarrow{AO}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{\left\| \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2+4 \end{bmatrix} \right\|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{4+4+4}}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}.$$

Méthode 3 pour la distance. Par le théorème de Pythagore, on observe que

$$\begin{aligned}
d\,(O,\mathcal{D})^2 &= \left\|\overrightarrow{AO}\right\|^2 - \left\| \left\langle \overrightarrow{AO} \middle| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\rangle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\|^2 \\
&= \left\|\overrightarrow{AO}\right\|^2 - \left(\left\langle \overrightarrow{AO} \middle| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\rangle \right)^2 \\
&= \left\| \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2 - \left(\left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{4+1+1}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \right)^2 \\
&= 4+4-\frac{(-4-2)^2}{6} \\
&= 8-6 = 2.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$d\,(O,\mathcal{D}) = \sqrt{2}.$$

4. Soient $\mathcal{P}$ le plan passant par $A\,(1,-2,-1)$ de vecteur normal $\vec{n}\,(4,1,5)$ et $\mathcal{D}$ la droite passant par $B\,(2,1,0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(-1,2,1)$. Déterminer l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.
Solution. Soit $M\,(x,y,z) \in \mathscr{E}$. On a

$$M \in \mathcal{P} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \left\langle \overrightarrow{AM} \middle| \vec{n} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} x-1 \\ y+2 \\ z+1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle = 4x-4+y+2+5z+5 = 4x+y+5z+3.$$

Donc une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est

$$\mathcal{P} : 4x + y + 5z + 3 = 0.$$

D'autre part, on a une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ donnée par

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Soit $M(x, y, z) \in \mathscr{E}$. On a

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D} \quad & \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \\ 4x + y + 5z + 3 = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \\ 8 - 4t + 1 + 2t + 5t + 3 = 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \\ 3t = -12 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2 + 4 = 6 \\ y = 1 - 8 = -7 \\ z = -4 \\ t = -4 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad x = 6, \ y = -7, \ z = -4.
\end{aligned}$$

Conclusion, la droite $\mathcal{D}$ coupe $\mathcal{P}$ en un point :

$$\boxed{\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = \{(6, -7, -4)\}.}$$

5. Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution. On commence par simplifier la matrice par l'opération élémentaire $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & 2 \\ -5 & 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 4 \\ -5 & 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 + L_4 \\
&= 5 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} && \textit{en développant par rapport à la première colonne} \\
&= 5 \left(2 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \right) && \textit{en développant par rapport à la première ligne} \\
&= 5 (2 \times (-12) - 3 \times (-7)) \\
&= 15 (-8 + 7) = -15.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\det(A) = -15.}$$