Correction de l'interrogation 04
Trigonométrie

1. (a) Développer $\cos(a+b)$, $\sin(a-b)$ et $\tan(a+b)$.
Solution. Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a).$$

Si on suppose de plus a, b, et $a+b$ dans $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}$, alors

$$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.$$

(b) Donner les valeurs remarquables du sinus, cosinus, tangente.
Solution. On a les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
&\cos(0)=1, && \sin(0)=0, && \tan(0)=0\\
&\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}, && \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}, && \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\\
&\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}, && \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}, && \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1\\
&\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}, && \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}, && \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\\
&\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, && \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, && \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}\tan(x)=+\infty.
\end{aligned}$$

2. Soit $x\in\mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3(x)\sin(3x)$.
Solution. On a les égalités entre réels suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos^3(x)\sin(3x) &= \cos^2(x)\cos(x)\sin(3x)\\
&=\frac{1+\cos(2x)}{2}\,\frac{\sin(3x+x)+\sin(3x-x)}{2}\\
&=\frac{1}{4}(1+\cos(2x))(\sin(4x)+\sin(2x))\\
&=\frac{1}{4}(\sin(4x)+\sin(2x)+\cos(2x)\sin(4x)+\cos(2x)\sin(2x))\\
&=\frac{1}{4}\left(\sin(4x)+\sin(2x)+\frac{\sin(4x+2x)+\sin(4x-2x)}{2}+\frac{\sin(4x)}{2}\right)\\
&=\frac{1}{8}(2\sin(4x)+2\sin(2x)+\sin(6x)+\sin(2x)+\sin(4x))\\
&=\frac{1}{8}(\sin(6x)+3\sin(4x)+3\sin(2x)).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\cos^3(x)\sin(3x)=\frac{1}{8}(\sin(6x)+3\sin(4x)+3\sin(2x)).}$$

Vérification : si $x=\frac{\pi}{4}$, on a $\cos^3\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4=\frac{1}{4}$. D'autre part,

$$\frac{1}{8}\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)+3\sin(\pi)+3\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{8}(-1+0+3)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}\ \textit{OK !}$$

3. Soit $a\in\mathbb{R}$, factoriser $5\sin\left(a-\frac{\pi}{2}\right)+5\sin(a)$.

Solution. *Méthode 1.* Soit $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} 5\sin\left(a-\frac{\pi}{2}\right)+5\sin(a) &= -5\cos(a)+5\sin(a) \\ &= 5\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(a)+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(a)\right) \\ &= 5\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos(a)+\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin(a)\right) \\ &= 5\sqrt{2}\cos\left(a-\frac{3\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \qquad 5\sin\left(a-\frac{\pi}{2}\right)+5\sin(a) = 5\sqrt{2}\cos\left(a-\frac{3\pi}{4}\right).}$$

Méthode 2. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} 5\sin\left(a-\frac{\pi}{2}\right)+5\sin(a) &= 5\left(\sin\left(a-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(a)\right) \\ &= 5\times 2\sin\left(\frac{a-\frac{\pi}{2}+a}{2}\right)\cos\left(\frac{a-\frac{\pi}{2}-a}{2}\right) \\ &= 10\sin\left(a-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 5\sqrt{2}\sin\left(a-\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

ou encore, pour retrouver le résultat de la méthode 1, on sait que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\sin(u) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)$ donc

$$5\sin\left(a-\frac{\pi}{2}\right)+5\sin(a) = 5\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(a-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 5\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{4}-a\right) = 5\sqrt{2}\cos\left(a-\frac{3\pi}{4}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \qquad 5\sin\left(a-\frac{\pi}{2}\right)+5\sin(a) = 5\sqrt{2}\sin\left(a-\frac{\pi}{4}\right) = 5\sqrt{2}\cos\left(a-\frac{3\pi}{4}\right).}$$

Vérification : si $a = \frac{\pi}{4}$. Alors,

$$\begin{aligned} &5\sin\left(a-\frac{\pi}{2}\right)+5\sin(a) = 5\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+5\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ &5\sqrt{2}\cos\left(a-\frac{3\pi}{4}\right) = 5\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\right) = 5\sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \ \textit{OK !} \end{aligned}$$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $\cos(2x)+2 = 5\sin(x)$.
Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\cos(2x)+2 = 5\sin(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad 1-2\sin^2(x)+2 = 5\sin(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\sin^2(x)+5\sin(x)-3 = 0.$$

Posons $X = \sin(x)$. On a

$$\cos(2x)+2 = 5\sin(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad 2X^2+5X-3 = 0.$$

Soit Δ le discriminant associé. On a $\Delta = 25+24 = 1$. Donc les racines associées sont $\frac{-5-7}{4} = -3$ et $\frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$. Dès lors,

$$\cos(2x)+2 = 5\sin(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad X = -3 \ \text{ OU } \ X = \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(x) = -3 \ \text{ OU } \ \sin(x) = \frac{1}{2}.$$

Or $\sin(x) \geqslant -1 > -3$. Donc

$$\cos(2x)+2 = 5\sin(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \sin(x) = \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{6}+2k\pi \ \text{ OU } \ x = \frac{5\pi}{6}+2k\pi.$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}.}$$

Vérification : si $x = \frac{\pi}{6}$*, on a* $\cos(2x) + 2 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$ *et* $5\sin(x) = 5\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{2}$ *OK !*
Si $x = \frac{5\pi}{6}$, $\cos(2x) + 2 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$ *et* $5\sin(x) = 5\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5}{2}$ *OK !*

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I) : 2\sin^2(x) - 3\sin(x) \geqslant 2$.
Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = \sin(x)$. On a les équivalences suivantes :

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad 2X^2 - 3X \geqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2X^2 - 3X - 2 \geqslant 0.$$

Soit Δ le discriminant associé. On a $\Delta = 9 + 16 = 25$. Donc les racines associées sont $\frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{3+5}{4} = 2$. Dès lors,

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad X \leqslant -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad X \geqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x) \leqslant -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \sin(x) \geqslant 2.$$

Or $\sin(x) \geqslant 2$ est impossible. Donc

$$(I) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x) \leqslant -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{6} + 2k\pi.$$

Conclusion, l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_{(I)} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right].}$$