Correction de l'interrogation 05
Complexes

1. (a) Exprimer la partie réelle, la partie imaginaire et le module en fonction du conjugué.
Solution. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a
$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \qquad \text{et} \qquad |z|^2 = z\overline{z}.$$
(b) Enoncer la formule de Moivre.
Solution. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a
$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

2. Calculer la forme algébrique de $z = \left(\frac{8i-1}{2-3i}\right)^2$.
Solution. On a les égalités entre complexes suivantes :
$$z = \left(\frac{(8i-1)(2+3i)}{4+9}\right)^2 = \left(\frac{16i-24-2-3i}{13}\right)^2 = \left(\frac{-26+13i}{13}\right)^2 = (-2+i)^2 = 4-4i-1 = 3-4i.$$
Conclusion,
$$\boxed{z = 3-4i.}$$

3. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $z = \mathrm{e}^{2i\theta}$. Factoriser $z^3 + \frac{1}{z}$.
Solution. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $z = \mathrm{e}^{2i\theta}$. Par la factorisation par l'angle moitié, puisque $\frac{6\theta-2\theta}{2} = 2\theta$, on a les égalités entre complexes suivantes :
$$z^3 + \frac{1}{z} = \mathrm{e}^{6i\theta} + \mathrm{e}^{-2i\theta} = \mathrm{e}^{i2\theta}\left(\mathrm{e}^{i4\theta} + \mathrm{e}^{-i4\theta}\right) = \mathrm{e}^{2i\theta}\, 2\cos(4\theta).$$
Conclusion,
$$\boxed{z^3 + \frac{1}{z} = 2\cos(4\theta)\,\mathrm{e}^{2i\theta}.}$$

4. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\frac{z-3i}{z+3} \in \mathbb{U}$.
Solution. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $z+3=0 \Leftrightarrow z=-3$. Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{-3\}$. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}
\frac{z-3i}{z+3} \in \mathbb{U} \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{z-3i}{z+3}\right| = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \left|\frac{z-3i}{z+3}\right|^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{z-3i}{z+3}\right)\overline{\left(\frac{z-3i}{z+3}\right)} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z-3i}{z+3}\,\frac{\overline{z}+3i}{\overline{z}+3} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad (z-3i)(\overline{z}+3i) = (z+3)(\overline{z}+3) \qquad \text{car } z \neq -3 \\
&\Leftrightarrow \quad z\overline{z} + 3iz - 3i\overline{z} + 9 = z\overline{z} + 3z + 3\overline{z} + 9 \\
&\Leftrightarrow \quad 3i(z-\overline{z}) = 3(z+\overline{z}) \\
&\Leftrightarrow \quad 3i(2i\mathrm{Im}(z)) = 3(2\mathrm{Re}(z)) \\
&\Leftrightarrow \quad -6\mathrm{Im}(z) = 6\mathrm{Re}(z) \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Re}(z).
\end{aligned}$$
Posons $z = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors,
$$\frac{z-3i}{z+3} \in \mathbb{U} \qquad \Leftrightarrow \qquad y = -x.$$
On note que $z=-3$, ne vérifie pas la dernière équation. Conclusion,
$$\boxed{\text{l'ensemble solution est la droite d'équation } y = -x.}$$

5. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}$.
Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par la formule de linéarisation, on a

$$\begin{aligned}
\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2} \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{\cos\left(x - \frac{\pi}{6} + x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{6} - x - \frac{\pi}{6}\right)}{2} < \frac{1}{2} \\
& \Leftrightarrow \quad \cos(2x) + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) < 1 \\
& \Leftrightarrow \quad \cos(2x) + \frac{1}{2} < 1 \\
& \Leftrightarrow \quad \cos(2x) < \frac{1}{2} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi < 2x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \\
& \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right[.}$$