Correction de l'interrogation 06
Calcul algébrique

1. (a) Enoncer la formule du binôme de Newton.

   Solution. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

   $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

   (b) Enoncer la formule de Pascal.

   Solution. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, on a

   $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

2. Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \mathrm{e}^{(k+a)^2-k^2}$.

   Solution. On a les égalités entre complexes suivantes :

   $$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=2}^{n+1} \mathrm{e}^{(k+a)^2-k^2} &= \sum_{k=2}^{n+1} \mathrm{e}^{k^2+2ak+a^2-k^2} \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \mathrm{e}^{2ak+a^2} \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \mathrm{e}^{a^2}\,\mathrm{e}^{2ak} \\ &= \mathrm{e}^{a^2} \sum_{k=2}^{n+1} \left(\mathrm{e}^{2a}\right)^k && \textit{par linéarité de la somme.} \end{aligned}$$

   Puisque $a \neq 0$, on a $\mathrm{e}^{2a} \neq 1$ et l'on reconnait une somme géométrique. On obtient donc

   $$\begin{aligned} S_n &= \mathrm{e}^{a^2} \left(\mathrm{e}^{2a}\right)^2 \frac{\left(\mathrm{e}^{2a}\right)^{n+1-2+1} - 1}{\mathrm{e}^{2a} - 1} \\ &= \mathrm{e}^{a^2+4a} \frac{\mathrm{e}^{2na} - 1}{\mathrm{e}^{2a} - 1} \end{aligned}$$

   Conclusion,

   $$\boxed{S_n = \mathrm{e}^{a^2+4a} \frac{\mathrm{e}^{2an} - 1}{\mathrm{e}^{2a} - 1}.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k$ à l'aide d'une inversion d'indice.

Solution. Posons $\tilde{k} = n - k$. Si k = 1, $\tilde{k} = n - 1$, si $k = n$, $\tilde{k} = 0$ Alors,

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k \\
&= \sum_{\tilde{k}=0}^{n-1} \binom{n}{n-\tilde{k}} (n - \tilde{k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{n-k} (n - k) \quad \text{car l'indice est muet} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{n-k} n - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{n-k} k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} n - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} k \qquad \text{car } \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n - \binom{n}{n} n - \left(\binom{n}{0} \times 0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k - \binom{n}{n} n \right) \\
&= n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - n - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k + n \\
&= n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - S_n.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$2S_n = n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \Leftrightarrow \qquad S_n = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

On reconnait alors un binôme de Newton, donc

$$S_n = \frac{n}{2} (1 + 1)^n = \frac{n 2^n}{2} = n 2^{n-1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = n 2^{n-1}.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{n}{i} 2^{i+j}$.

   Solution. On a

$$S_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{n}{i} 2^i 2^j.$$

   Les variables étant séparées, on a les égalités suivantes :

$$S_n = \left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 2^i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} 2^j \right).$$

   On reconnait un binôme de Newton dans la première somme et une somme géométrique de raison $2 \neq 1$ dans la seconde. Donc

$$S_n = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i - 1 \right) \left(2 \frac{2^n - 1}{2 - 1} \right) = \left((1 + 2)^n - 1 \right) 2 \left(2^n - 1 \right)$$

   Conclusion,

$$\boxed{S_n = 2 \left(3^n - 1 \right) \left(2^n - 1 \right).}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i} 2^i$.

Solution. On va sommer sur i en interne :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} 2^i \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} 2^i - 1 \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left((2+1)^j - 1 \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} 3^j - \sum_{j=1}^{n} 1 \\
&= 3 \times \frac{3^n - 1}{3 - 1} - n \\
&= \frac{3}{2} (3^n - 1) - n.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{S_n = \frac{3}{2} (3^n - 1) - n.}$$