Réponses de l'interrogation 06
Calcul algébrique

1. (a) Enoncer la formule du binôme de Newton.
   Solution. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$
   (b) Enoncer la formule de Pascal.
   Solution. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, on a
   $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

2. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} \mathrm{e}^{(k+a)^2 - k^2}$.

   Solution. Conclusion,
   $$\boxed{S_n = \mathrm{e}^{a^2+4a} \frac{\mathrm{e}^{2an} - 1}{\mathrm{e}^{2a} - 1}.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k$ à l'aide d'une inversion d'indice.

   Solution. Conclusion,
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = n 2^{n-1}.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{n}{i} 2^{i+j}$.

   Solution. Conclusion,
   $$\boxed{S_n = 2\left(3^n - 1\right)\left(2^n - 1\right).}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i} 2^i$.

   Solution. Conclusion,
   $$\boxed{S_n = \frac{3}{2}\left(3^n - 1\right) - n.}$$