Correction de l'interrogation 07
Fonctions usuelles

1. (a) Enoncer la croissance comparée du logarithme en $+\infty$/en 0, de l'exponentielle en $-\infty$/en $+\infty$.
Solution.
   - Soient $a>0$ et $b>0$. On a
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^b\,|\ln(x)|^a = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^a(x)}{x^b} = 0.$$
   - Soient $a>0$ et $b>0$. On a
$$\lim_{x\to-\infty} |x|^b\,\mathrm{e}^{ax} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{x^b} = +\infty.$$

   (b) Enoncer la formule reliant les carrés des fonctions hyperboliques et celle sur arctan.
Solution. On a les relations suivantes :
   - $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)=1$
   - $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$
   - $\forall x\in\mathbb{R}_-^*,\ \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}$

   (c) Définir une fonction dérivable en a. Quel est le lien entre continuité et dérivabilité ?
Solution. Soient $a\in\mathbb{R}$, I un voisinage de a, $f\in\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. On a
$$f \text{ est dérivable en } a \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$
En particulier
$$(\ f \text{ dérivable en } a\ ) \qquad \Rightarrow \qquad (\ f \text{ continue en } a\ ).$$

2. Simplifier au maximum $A=\ln\left(\ln\left(\sqrt{\exp\left(3+\sqrt{5}\right)}\right)\right)+\exp\left(-\ln\left(\frac{2}{\ln\left(\left(3-\sqrt{5}\right)^2\right)}\right)\right)$.
Solution. On a les égalités dans $\mathbb{R}$ suivantes :
$$\begin{aligned}
A &= \ln\left(\ln\left(\sqrt{\exp\left(3+\sqrt{5}\right)}\right)\right)+\exp\left(-\ln\left(\frac{2}{\ln\left(\left(3-\sqrt{5}\right)^2\right)}\right)\right)\\
&= \ln\left(\frac{1}{2}\ln\left(\exp\left(3+\sqrt{5}\right)\right)\right)+\exp\left(\ln\left(\frac{\ln\left(\left(3-\sqrt{5}\right)^2\right)}{2}\right)\right)\\
&= \ln\left(\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)\right)+\frac{\ln\left(\left(3-\sqrt{5}\right)^2\right)}{2}\\
&= \ln\left(3+\sqrt{5}\right)-\ln(2)+\ln\left(3-\sqrt{5}\right)\\
&= \ln\left(\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)\right)-\ln(2)\\
&= \ln(9-5)-\ln(2)\\
&= \ln(4)-\ln(2)\\
&= 2\ln(2)-\ln(2)\\
&= \ln(2).
\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{A=\ln(2).}$$

3. Soit $f : x \mapsto \ln\left(\arcsin\left(\frac{1}{x+2}\right)\right)$. Déterminer le domaine de dérivabilité de f puis dériver f.
Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
f \text{ est dérivable en } x \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \arcsin\left(\frac{1}{x+2}\right) > 0 \\ -1 < \frac{1}{x+2} < 1 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{x+2} > 0 \\ -1 < \frac{1}{x+2} < 1 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+2 > 0 \\ x+2 > 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad x > -1.
\end{aligned}$$

Donc f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$. De plus, pour tout $x \in]-1\,;+\infty[$,

$$\begin{aligned}
f'(x) = \frac{\left(\arcsin\left(\frac{1}{x+2}\right)\right)'}{\arcsin\left(\frac{1}{x+2}\right)} &= \left(\frac{1}{x+2}\right)' \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{(x+2)^2}}} \frac{1}{\arcsin\left(\frac{1}{x+2}\right)} \\
&= -\frac{1}{(x+2)^2}\sqrt{\frac{(x+2)^2}{x^2+4x+4-1}}\frac{1}{\arcsin\left(\frac{1}{x+2}\right)} \\
&= -\frac{1}{(x+2)^2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+3}}\frac{1}{\arcsin\left(\frac{1}{x+2}\right)} \qquad \text{car } x+2>0 \\
&= -\frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}\arcsin\left(\frac{1}{x+2}\right)}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur }]-2\,;+\infty[}$$

et

$$\boxed{\forall x \in]-2\,;+\infty[, \quad f'(x) = -\frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+3}\arcsin\left(\frac{1}{x+2}\right)}.}$$

4. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^3\arctan(\mathrm{ch}(x))}{1+\mathrm{sh}(x)}}$.
Solution. Soit $x > 0$, on a

$$\sqrt{\frac{x^3\arctan(\mathrm{ch}(x))}{1+\mathrm{sh}(x)}} = \sqrt{\frac{x^3\arctan(\mathrm{ch}(x))}{1+\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}}} = \sqrt{\frac{2x^3}{\mathrm{e}^x}\times\frac{\arctan(\mathrm{ch}(x))}{1+2\,\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}}}.$$

Or puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{ch}(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{u\to+\infty}\arctan(u) = \dfrac{\pi}{2}$, par composition,

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan(\mathrm{ch}(x)) = \frac{\pi}{2}.$$

De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} 1+2\,\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x} = 1.$$

Enfin, par croissance comparée,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

Donc par produit et quotient,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{\mathrm{e}^x}\frac{\arctan(\mathrm{ch}(x))}{1+2\,\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}} = 0\times\frac{\frac{\pi}{2}}{1} = 0.$$

Conclusion, par composition avec la racine carrée,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3\arctan(\mathrm{ch}(x))}{1+\mathrm{sh}(x)}} = 0.}$$

5. Démontrer que l'équation $\arctan(3x)+\arctan(10x) = \frac{3\pi}{4}$ admet au plus une solution dans $\mathbb{R}$ et préciser l'unique valeur du réel possiblement solution.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les implications suivantes :

$$\begin{aligned}
\arctan(3x)+\arctan(10x) = \frac{3\pi}{4} \quad &\Rightarrow \quad \tan\left(\arctan(3x)+\arctan(10x)\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1 \\
&\Rightarrow \quad \frac{\tan\left(\arctan(3x)\right)+\tan\left(\arctan(10x)\right)}{1-\tan\left(\arctan(3x)\right)\tan\left(\arctan(10x)\right)} = -1 \\
&\Rightarrow \quad \frac{3x+10x}{1-3x\times 10x} = -1 \\
&\Rightarrow \quad \frac{13x}{1-30x^2} = -1 \\
&\Rightarrow \quad 13x = -1+30x^2 \\
&\Rightarrow \quad 30x^2-13x-1 = 0.
\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé, $\Delta = 169+120 = 289 = 17^2$. Par conséquent les racines associées sont $r_1 = \frac{13-17}{60} = -\frac{4}{60} = -\frac{1}{15}$ et $r_2 = \frac{13+17}{60} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\arctan(3x)+\arctan(10x) = \frac{3\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{15} \text{ OU } x = \frac{1}{2}.$$

Or on observe que si $x = -\frac{1}{15}$ alors $5x < 3x < 0$ et donc $\arctan(3x)+\arctan(10x) < 0 < \frac{3\pi}{4}$. Par conséquent, $-\frac{1}{15}$ n'est pas solution. Conclusion,

$$\boxed{\text{L'équation admet au plus une solution et si celle-ci existe elle vaut nécessairement } x = \frac{1}{2}.}$$