Correction de l'interrogation 08
Equations complexes

1. (a) Enoncer la proposition retournant les racines carrées d'un complexe.
Solution. Soit $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Alors l'équation $\omega^2 = z$ d'inconnu $\omega \in \mathbb{C}$ admet exactement deux solutions données par :
$$\omega_1 = \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = -\,\omega_1 = \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}.$$
(b) Enoncer la propriété donnant les racines n-ièmes d'un complexe quelconque.
Solution. Soit $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, on a
$$\omega^n = z \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad \omega = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}.$$
(c) Définir une fonction injective, surjective, bijective.
Solution. Soient $U \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $V \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{F}(U,V)$.
   - On dit que f est injective sur U si et seulement si
$$\forall (x,y) \in U^2, \qquad (f(x) = f(y)) \qquad \Rightarrow \qquad (x = y).$$
   - On dit que f est surjective sur V si et seulement si
$$\forall y \in V,\ \exists x \in U, \qquad y = f(x).$$
   - On dit que f est bijective sur U dans V si et seulement si
$$\forall y \in V,\ \exists! x \in U, \qquad y = f(x).$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = -5 + 5i$.
Solution. On observe que
$$-5 + 5i = 5\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}.$$
Par conséquent, pour $z \in \mathbb{C}$, on a les équivalences suivantes :
$$z^2 = -5+5i = 5\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}} \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \sqrt{5\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{8}} \quad \text{OU} \quad z = -\sqrt{5\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{8}} = \sqrt{5\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{3\pi}{8}+\pi\right)} = \sqrt{5\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{11\pi}{8}\right)}.$$
Conclusion,
$$\boxed{z^2 = -5 + 5i \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \sqrt{5\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{8}} \quad \text{OU} \quad z = \sqrt{5\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{8}}.}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $(z-1)^6 = (z+1)^6$.
Solution. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}
(z-1)^6 = (z+1)^6 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![0;5]\!], \quad z - 1 = (z+1)\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{6}} \\
&\Leftrightarrow \quad (k = 0 \text{ et } z - 1 = z + 1) \quad \text{OU} \quad \exists k \in [\![1;5]\!], \quad z - 1 = (z+1)\,\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{3}} \\
&\Leftrightarrow \quad -1 = 1 \text{ (impossible)} \quad \text{OU} \quad \exists k \in [\![1;5]\!], \quad z\left(1 - \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{3}}\right) = \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{3}} + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![1;5]\!], \quad z = \frac{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{3}} + 1}{1 - \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{3}}} \qquad \text{car pour tout } k \in [\![1;5]\!],\ \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{3}} \neq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![1;5]\!], \quad z = \frac{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{6}}}{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{6}}}\,\frac{\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{6}} + \mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{6}}}{\mathrm{e}^{-i\frac{k\pi}{6}} - \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{6}}} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists k \in [\![1;5]\!], \quad z = \frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)}{-2i\sin\left(\frac{k\pi}{6}\right)} = i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{6}\right)}.
\end{aligned}$$
Conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a
$$\boxed{(z-1)^6 = (z+1)^6 \qquad \Leftrightarrow \qquad z \in \left\{ i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{6}\right)} \;\middle|\; k \in [\![1;5]\!] \right\}.}$$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(F) : 9z^2 - 3(3-i)z + 4 - 3i = 0$.
Solution. Soit Δ le discriminant associé à (F). On a

$$\Delta = 9(3-i)^2 - 4 \times 9(4-3i) = 9(9-6i-1-16+12i) = 9(-8+6i).$$

Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\delta = x+iy \in \mathbb{C}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\delta^2 = -8+6i \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = -8+6i \\ |\delta|^2 = x^2 + y^2 = |-8+6i| = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = \frac{-8+10}{2} = 1 \\ y^2 = \frac{10+8}{2} = 9 \\ xy = 3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases} \qquad \text{car } xy \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Posons $\delta = 1+3i$. Alors, on trouve que

$$\begin{aligned}
(F) \quad &\Leftrightarrow \quad z = \frac{3(3-i)+3(1+3i)}{18} \quad \text{OU} \quad z = \frac{3(3-i)-3(1+3i)}{18} \\
&\Leftrightarrow \quad z = \frac{3-i+1+3i}{6} \quad \text{OU} \quad z = \frac{3-i-1-3i}{6} \\
&\Leftrightarrow \quad z = \frac{4+2i}{6} \quad \text{OU} \quad z = \frac{2-4i}{6}
\end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (F) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_{(F)} = \left\{ \frac{2+i}{3} \quad \text{OU} \quad z = \frac{1-2i}{3} \right\}.}$$

5. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Soient $A(1)$, $B(z+2)$ et $C(iz)$. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ tels que ABC est rectangle en A.
Solution. Puisque $z_C - Z_A = iz - 1 \neq 0$ car $z \neq -i$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
ABC \text{ rectangle en } A \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z+2-1}{iz-1} \in i\mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z+1}{iz-1} \in i\mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z+1}{iz-1} = -\overline{\left(\frac{z+1}{iz-1}\right)} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z+1}{iz-1} = -\frac{\overline{z}+1}{-i\overline{z}-1} \\
&\Leftrightarrow \quad (z+1)(-i\overline{z}-1) = -(\overline{z}+1)(iz-1) \qquad \text{car } z \neq -i \\
&\Leftrightarrow \quad -i|z|^2 - z - i\overline{z} - 1 = -i|z|^2 + \overline{z} - iz + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = z + \overline{z} - i(z - \overline{z}) + 2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\mathrm{Re}(z) - i2i\mathrm{Im}(z) + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Posons $z = x + iy$, alors,

$$ABC \text{ rectangle en } A \quad \Leftrightarrow \quad x + y + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -x - 1.$$

On observe que $z = -i$ fait partie de la droite obtenue. Conclusion, l'ensemble solution est la droite d'équation $y = -x - 1$ privée du point d'affixe $-i$.

$$\boxed{\mathscr{S} = \{ z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y = -x - 1 \} \setminus \{-i\} .}$$