Réponses de l'interrogation 08
Equations complexes

1. (a) Enoncer la proposition retournant les racines carrées d'un complexe.
Solution. Soit $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Alors l'équation $\omega^2 = z$ d'inconnu $\omega \in \mathbb{C}$ admet exactement deux solutions données par :
$$\omega_1 = \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = -\,\omega_1 = \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}.$$
(b) Enoncer la propriété donnant les racines n-ièmes d'un complexe quelconque.
Solution. Soit $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, avec $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, on a
$$\omega^n = z \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0; n-1]\!], \quad \omega = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}.$$
(c) Définir une fonction injective, surjective, bijective.
Solution. Soient $U \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $V \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $f \in \mathscr{F}(U,V)$.
   - On dit que f est injective sur U si et seulement si
$$\forall (x,y) \in U^2, \qquad (f(x) = f(y)) \qquad \Rightarrow \qquad (x = y).$$
   - On dit que f est surjective sur V si et seulement si
$$\forall y \in V,\ \exists x \in U, \qquad y = f(x).$$
   - On dit que f est bijective sur U dans V si et seulement si
$$\forall y \in V,\ \exists! x \in U, \qquad y = f(x).$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = -5+5i$.
Solution. Conclusion,
$$\boxed{z^2 = -5+5i \qquad \Leftrightarrow \qquad z = \sqrt{5\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{8}} \quad \text{OU} \quad z = \sqrt{5\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{8}}.}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $(z-1)^6 = (z+1)^6$.
Solution. Conclusion, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a
$$\boxed{(z-1)^6 = (z+1)^6 \qquad \Leftrightarrow \qquad z \in \left\{ i\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{6}\right)} \,\middle|\, k \in [\![1;5]\!] \right\}.}$$

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(F) : 9z^2 - 3(3-i)z + 4 - 3i = 0$.
Solution. Conclusion, l'ensemble des solutions de (F) est donné par
$$\boxed{\mathscr{S}_{(F)} = \left\{ \frac{2+i}{3} \quad \text{OU} \quad z = \frac{1-2i}{3} \right\}.}$$

5. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Soient $A(1)$, $B(z+2)$ et $C(iz)$. Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ tels que ABC est rectangle en A.
Solution. On observe que $z = -i$ fait partie de la droite obtenue. Conclusion, l'ensemble solution est la droite d'équation $y = -x-1$ privée du point d'affixe $-i$.
$$\boxed{\mathscr{S} = \{ z = x+iy \in \mathbb{C} \mid y = -x-1 \} \setminus \{-i\}.}$$