

Correction de l'interrogation 10

d'entraînement

Equations différentielles d'ordre 1

1. Restituer le cours.

1.1 Soient I un intervalle de \mathbb{R} , a une fonction continue sur I , A une primitive de a sur I alors l'ensemble des solutions de

$$(E_0) \quad \forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

est donnée par

$$\mathcal{S}_0 = \text{Vect} \left(\begin{array}{c} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-A(x)} \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{c} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto C e^{-A(x)} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

1.2 L'ensemble \mathcal{S}_0 des solutions d'une équation homogène vérifie :

- La fonction nulle est dans \mathcal{S}_0
- Pour tout $(f, g) \in \mathcal{S}_0^2$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a $\lambda f + \mu g \in \mathcal{S}_0$.

1.3 Soient I un intervalle de \mathbb{R} , a et b deux fonctions continues sur I , y_p une solution de

$$(E) \quad \forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

et \mathcal{S}_0 l'ensemble des solutions de

$$(E_0) \quad \forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = 0.$$

Alors, \mathcal{S} l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0 = \{y_p + y_0 \mid y_0 \in \mathcal{S}_0\}.$$

1.4 Soient I un intervalle, a , b_1 et b_2 trois fonctions continues sur I , y_1 une solution de

$$(E_1) \quad \forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = b_1(x)$$

et y_2 une solution de

$$(E_2) \quad \forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = b_2(x).$$

Alors, $y_1 + y_2$ est une solution de

$$(E) \quad \forall x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = b_1(x) + b_2(x)$$

1.5 Soient I un intervalle, a et b deux fonctions continues sur I , $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ alors le problème suivant d'inconnue y une fonction dérivable sur I est un problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

2. Déterminer les solutions d'une équation différentielle homogène d'ordre 1.

2.1 On a $(E) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, y'(t) - (5t^2 + 3t)y(t) = 6t$ donc l'équation homogène associée est

$$(E_0) : \forall t \in \mathbb{R}, y'(t) - (5t^2 + 3t)y(t) = 0.$$

La fonction $t \mapsto -(5t^2 + 3t)$ est continue sur \mathbb{R} et donc admet des primitives sur \mathbb{R} dont l'une est donnée par $t \mapsto -\frac{5}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2$. Par conséquent,

$$\mathcal{S}_0 = \text{Vect} \left(\begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{\frac{5}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2} \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto C e^{\frac{5}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.2 L'équation homogène associée à (E) est $(E_0) : \forall s \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^4(s)y'(s) + \operatorname{sh}(s)y(s) = 0$. De plus pour tout $s \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(s) > 0$ donc

$$(E_0) \quad \Leftrightarrow \quad \forall s \in \mathbb{R}, y'(s) + \frac{\operatorname{sh}(s)}{\operatorname{ch}^4(s)}y(s) = 0$$

La fonction $s \mapsto \frac{\operatorname{sh}(s)}{\operatorname{ch}^4(s)}$ est continue sur \mathbb{R} donc admet des primitives sur \mathbb{R} dont l'une est donnée par $s \mapsto -\frac{1}{3\operatorname{ch}^3(s)}$. Conclusion,

$$\mathcal{S}_0 = \operatorname{Vect} \left(\begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s \mapsto e^{\frac{1}{3\operatorname{ch}^3(s)}} \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s \mapsto C e^{\frac{1}{3\operatorname{ch}^3(s)}} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.3 Pour tout $u \in \mathbb{R}, u^2 + 7 \geq 7 > 0$. Donc $(E) \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}, y'(u) + \frac{3u}{u^2+7}y(u) = \frac{5}{u^2+7}$ et l'équation homogène associée est

$$(E_0) : \forall u \in \mathbb{R}, y'(u) + \frac{3u}{u^2+7}y(u) = 0.$$

La fonction $u \mapsto \frac{3u}{u^2+7}$ est continue sur \mathbb{R} donc admet des primitives sur \mathbb{R} dont l'une est donnée par $u \mapsto \frac{3}{2} \ln(|u^2+7|) = \frac{3}{2} \ln(u^2+7)$. Or pour tout $u \in \mathbb{R}, e^{-\frac{3}{2} \ln(u^2+7)} = \frac{1}{(u^2+7)^{3/2}}$. Conclusion,

$$\mathcal{S}_0 = \operatorname{Vect} \left(\begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \frac{1}{(u^2+7)^{3/2}} \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto \frac{C}{(u^2+7)^{3/2}} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.4 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\sqrt{1-x^2} > 0 \Leftrightarrow x \in]-1; 1[$. Donc $(E) \Leftrightarrow \forall x \in]-1; 1[y'(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y(x) = \frac{8}{\sqrt{1-x^2}}$ et l'équation homogène associée est

$$(E_0) : \forall x \in]-1; 1[y'(x) - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y(x) = 0.$$

La fonction $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur l'intervalle $]-1; 1[$ donc admet des primitives sur $]-1; 1[$ dont l'une est donnée par $x \mapsto -\arcsin(x)$. Conclusion,

$$\mathcal{S}_0 = \operatorname{Vect} \left(\begin{array}{c}]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{\arcsin(x)} \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{c}]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto C e^{\arcsin(x)} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.5 Soit $k \in \mathbb{N}$ et $I_k =]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$. On a sur $I_k, (E) \Leftrightarrow \forall r \in I_k, y'(r) + \tan(r)y(r) = 0$. On note que (E) est homogène. La fonction \tan est continue sur l'intervalle I_k donc admet des primitives sur I_k dont l'une est donnée par $r \mapsto -\ln(|\cos(r)|)$. Conclusion,

$$\mathcal{S}_0 = \operatorname{Vect} \left(\begin{array}{c} I_k \rightarrow \mathbb{R} \\ r \mapsto |\cos(r)| \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{c} I_k \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto C |\cos(x)| \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

La fonction \cos est de signe constant sur I_k donc, quitte à changer C en $-C$,

$$\mathcal{S}_0 = \operatorname{Vect} \left(\begin{array}{c} I_k \rightarrow \mathbb{R} \\ r \mapsto \cos(r) \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{c} I_k \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto C \cos(x) \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.6 Pour tout $a \geq 0, a^3 + 3a^2 + 7a + 8 \geq 8 > 0$. Donc $(E) \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}_+, y'(a) + \frac{3a^2+6a+7}{a^3+3a^2+7a+8}y(a) = \frac{8a^3-5a^2+2a+4}{a^3+3a^2+7a+8}$ et l'équation homogène associée est

$$(E_0) : \forall a \in \mathbb{R}_+, y'(a) + \frac{3a^2+6a+7}{a^3+3a^2+7a+8}y(a) = 0.$$

La fonction $a \mapsto \frac{3a^2+6a+7}{a^3+3a^2+7a+8}$ est continue sur l'intervalle \mathbb{R}_+ donc admet des primitives sur \mathbb{R}_+ dont l'une est donnée par $a \mapsto \ln(|a^3+3a^2+7a+8|) = \ln(a^3+3a^2+7a+8)$. Conclusion,

$$\mathcal{S}_0 = \operatorname{Vect} \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ a \mapsto \frac{1}{a^3+3a^2+7a+8} \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ a \mapsto \frac{C}{a^3+3a^2+7a+8} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.7 Pour tout $t > 1$, on a $t\sqrt{\ln(t)} > 0$, donc $(E) \Leftrightarrow \forall t \in]1; +\infty[, y'(t) + \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}y(t) = -\frac{\ln(t)}{t\sqrt{\ln(t)}}$ et l'équation homogène associée est

$$(E_0) : \forall t \in]1; +\infty[, y'(t) + \frac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}y(t) = 0.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1/t}{\sqrt{\ln(t)}}$ est continue sur l'intervalle $]1; +\infty[$ donc admet des primitives sur $]1; +\infty[$ dont l'une est donnée par $t \mapsto 2\sqrt{\ln(t)}$. Conclusion,

$$\mathcal{S}_0 = \text{Vect} \left(\begin{array}{c}]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-2\sqrt{\ln(t)}} \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{c}]1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-2\sqrt{\ln(t)}} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.8 On a $(E) \Leftrightarrow \forall s \in \mathbb{R}, (1 + \cos^2(s))y'(s) + \sin(s)y(s) = 0$. On a pour tout $s \in \mathbb{R}, 1 + \cos^2(s) \geq 1 > 0$. Donc

$$(E) \Leftrightarrow \forall s \in \mathbb{R}, y'(s) + \frac{\sin(s)}{1 + \cos^2(s)}y(s) = 0.$$

On note que (E) est homogène. La fonction $s \mapsto \frac{\sin(s)}{1 + \cos^2(s)}$ est continue sur \mathbb{R} donc admet des primitives sur \mathbb{R} dont l'une est donnée par $s \mapsto -\arctan(\cos(s))$. Conclusion,

$$\mathcal{S}_0 = \text{Vect} \left(\begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s \mapsto e^{\arctan(\cos(s))} \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s \mapsto e^{\arctan(\cos(s))} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.9 Pour tout $u \in]-1; 1[$, on a $\sqrt{1-u^2} > 0$. Donc $(E) \Leftrightarrow \forall u \in]-1; 1[y'(u) + \frac{\arcsin(u)}{\sqrt{1-u^2}}y(u) = \frac{\arccos(u)}{\sqrt{1-u^2}}$ et l'équation homogène associée est

$$(E_0) : \forall u \in]-1; 1[y'(u) + \frac{\arcsin(u)}{\sqrt{1-u^2}}y(u) = 0.$$

La fonction $u \mapsto \frac{\arcsin(u)}{\sqrt{1-u^2}}$ est continue sur l'intervalle $] -1; 1[$ donc admet des primitives sur $] -1; 1[$ dont l'une est donnée par $u \mapsto \frac{1}{2} \arcsin^2(u)$. Conclusion,

$$\mathcal{S}_0 = \text{Vect} \left(\begin{array}{c}]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto e^{-\frac{\arcsin^2(u)}{2}} \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{c}]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto C e^{-\frac{\arcsin^2(u)}{2}} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.10 L'équation homogène associée est $(E_0) : \forall x \in \mathbb{R} y'(x) + e^{x+e^x}y(x) = 0$. La fonction $x \mapsto e^{x+e^x} = e^x e^{e^x}$ est continue sur \mathbb{R} donc admet des primitives sur \mathbb{R} dont l'une est donnée par $x \mapsto e^{e^x}$. Conclusion,

$$\mathcal{S}_0 = \text{Vect} \left(\begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-e^{e^x}} \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto C e^{-e^{e^x}} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Voici juste les conclusions des dernières questions :

2.9 Pour $I = [1/2; +\infty[$ ou $I =]-\infty; -1/2]$,

$$\mathcal{S}_0 = \text{Vect} \left(\begin{array}{c} I \rightarrow \mathbb{R} \\ r \mapsto e^{-\frac{2}{3}(4r^2-1)^{3/2}} \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{c} I \rightarrow \mathbb{R} \\ r \mapsto C e^{-\frac{2}{3}(4r^2-1)^{3/2}} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$2.10 \mathcal{S}_0 = \text{Vect} \left(\begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ a \mapsto e^{-3\arctan(3a)} \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ a \mapsto C e^{-3\arctan(3a)} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$2.11 \text{ Pour } I =]0; 1[\text{ ou } I =]1; +\infty[, \mathcal{S}_0 = \text{Vect} \left(\begin{array}{c} I \rightarrow \mathbb{R} \\ \theta \mapsto \ln(\theta) \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{c} I \rightarrow \mathbb{R} \\ \theta \mapsto C \ln(\theta) \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$2.12 \mathcal{S}_0 = \text{Vect} \left(\begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-\frac{\arctan(t^3)}{3}} \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto C e^{-\frac{\arctan(t^3)}{3}} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$2.13 \mathcal{S}_0 = \text{Vect} \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ s \mapsto e^{-\arctan(\ln(s))} \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ s \mapsto C e^{-\arctan(\ln(s))} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$2.14 \mathcal{S}_0 = \text{Vect} \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto e^{-\frac{2\sqrt{3}}{3} e^{\sqrt{3}u}} \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto C e^{-\frac{2\sqrt{3}}{3} e^{\sqrt{3}u}} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$2.15 \mathcal{S}_0 = \text{Vect} \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ s \mapsto e^{-\arctan(\ln(s))} \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ s \mapsto C e^{-\arctan(\ln(s))} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$2.16 \mathcal{S}_0 = \text{Vect} \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto e^{-\frac{2}{\sqrt{3}} e^{\sqrt{3}u}} \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ u \mapsto C e^{-\frac{2}{\sqrt{3}} e^{\sqrt{3}u}} \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Savoir appliquer la méthode de variation de la constante.

3.1 Les fonctions $a : x \mapsto \frac{2x}{1-x^2}$ et $b : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sont continues sur $I =]-1; 1[$, donc

$$(E) \text{ admet des solutions sur } I.$$

Soient λ une fonction dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $y(x) = \lambda(x)y_0(x)$. La fonction y est dérivable sur I et on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & y \text{ solution de } (E) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I, \quad \lambda'(x)y_0(x) + \underbrace{\lambda(x)y_0'(x) + \frac{2x}{1-x^2} \lambda(x)y_0(x)}_{=0} = \sqrt{1-x^2} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I, \quad \lambda'(x)y_0(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{car } y_0 \text{ solution de l'équation homogène} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I, \quad \lambda'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{car } y_0(x) \neq 0 \\ \Leftrightarrow & \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad \lambda(x) = \arcsin(x) + C \\ \Leftrightarrow & \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad y(x) = \lambda(x)y_0(x) = (\arcsin(x) + C)(1-x^2). \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l}]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (\arcsin(x) + C)(1-x^2) \end{array} \mid C \in \mathbb{R} \right\}.$$

3.2 Les fonctions $a : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et $b : x \mapsto 1 + \ln(x)$ sont continues sur $I = \mathbb{R}_+^*$, donc

$$(E) \text{ admet des solutions sur } I.$$

Soient λ une fonction dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $y(x) = \lambda(x)y_0(x)$. La fonction y est dérivable sur I et on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & y \text{ solution de } (E) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I, \quad \lambda'(x)y_0(x) + \underbrace{\lambda(x)y_0'(x) + \frac{1}{x+1} \lambda(x)y_0(x)}_{=0} = 1 + \ln(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I, \quad \lambda'(x)y_0(x) = 1 + \ln(x) \quad \text{car } y_0 \text{ solution de l'équation homogène} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I, \quad \lambda'(x) = (x+1)(1 + \ln(x)) = x + 1 + x \ln(x) + \ln(x) \quad \text{car } y_0(x) \neq 0. \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto x \ln(x)$ est continue sur I donc admet des primitives sur I . Soit $x \in I$ et

$$F(x) = \int_1^x t \ln(t) dt.$$

Posons

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} u(t) = \frac{t^2}{2} \\ v(t) = \ln(t). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont \mathcal{C}^1 sur I et

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} u'(t) = t \\ v'(t) = \frac{1}{t}. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$F(x) = \left[\frac{t^2}{2} \ln(t) \right]_{t=1}^{t=x} - \int_1^x \frac{t^2}{2} \frac{1}{t} dt = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \left[\frac{t^2}{4} \right]_{t=1}^{t=x} = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

On a ainsi,

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad \lambda(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + x \ln(x) - x + C \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad \lambda(x) = \frac{x^2}{4} + \left(\frac{x}{2} + 1 \right) x \ln(x) + C \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad y(x) = \lambda(x) y_0(x) = \frac{\frac{x^2}{4} + \left(\frac{x}{2} + 1 \right) x \ln(x) + C}{x + 1}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\frac{x^2}{4} + \left(\frac{x}{2} + 1 \right) x \ln(x) + C}{x + 1} \quad \left| \quad C \in \mathbb{R} \right. \end{array} \right\}.$$

3.3 Les fonctions $a : x \mapsto -2$ et $b : x \mapsto \cos(x)$ sont continues sur \mathbb{R} , donc

$$(E) \text{ admet des solutions sur } I.$$

Soient λ une fonction dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $y(x) = \lambda(x)y_0(x)$. La fonction y est dérivable sur I et on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x)y_0(x) + \underbrace{\lambda(x)y_0'(x) - 2\lambda(x)y_0(x)}_{=0} = \cos(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x)y_0(x) = \cos(x) \quad \text{car } y_0 \text{ solution de l'équation homogène} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x) = \cos(x) e^{-2x} \quad \text{car } y_0(x) \neq 0. \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \cos(x) e^{-2x}$ est continue sur \mathbb{R} et admet donc des primitives sur \mathbb{R} . Soit $x \in \mathbb{R}$ et

$$F(x) = \int_0^x \cos(t) e^{-2t} dt.$$

On a

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \operatorname{Re}(e^{it}) e^{-2t} dt = \operatorname{Re} \left(\int_0^x e^{it} e^{-2t} dt \right) = \operatorname{Re} \left(\left[\frac{e^{(i-2)t}}{i-2} \right]_{t=0}^{t=x} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{e^{(i-2)x} - 1}{i-2} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{-(2+i)(e^{-2x} \cos(x) + i e^{-2x} \sin(x) - 1)}{4+1} \right) \\ &= \frac{-2(e^{-2x} \cos(x) - 1) + e^{-2x} \sin(x)}{5} \\ &= \frac{e^{-2x}(\sin(x) - 2 \cos(x))}{5} + \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad \lambda(x) = \frac{1}{5} e^{-2x} (\sin(x) - 2 \cos(x)) + C \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad y(x) = \lambda(x) y_0(x) = \frac{1}{5} (\sin(x) - 2 \cos(x)) + C e^{2x}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(x) - 2 \cos(x)}{5} + C e^{2x} \quad \left| \quad C \in \mathbb{R} \right. \end{array} \right\}.$$

3.4 Les fonctions $a : x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$ et $b : x \mapsto (x+1) \arctan(x)$ sont continues sur $I = \mathbb{R}_+^*$, donc

$$(E) \text{ admet des solutions sur } I .$$

Soient λ une fonction dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $y(x) = \lambda(x)y_0(x)$. La fonction y est dérivable sur I et on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & y \text{ solution de } (E) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I, \quad \underbrace{\lambda'(x)y_0(x) + \lambda(x)y_0'(x) + \frac{1}{x(x+1)}\lambda(x)y_0(x)}_{=0} = (x+1) \arctan(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I, \quad \lambda'(x)y_0(x) = (x+1) \arctan(x) \text{ car } y_0 \text{ solution de l'équation homogène} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I, \quad \lambda'(x) = (x+1) \arctan(x) \frac{x}{x+1} = x \arctan(x) \quad \text{car } y_0(x) \neq 0. \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto x \arctan(x)$ est continue sur \mathbb{R} et admet donc des primitives sur \mathbb{R} et donc sur I . Soient $x \in \mathbb{R}$ et

$$F(x) = \int_0^x t \arctan(t) dt.$$

Posons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u(t) = \frac{t^2}{2} \\ v(t) = \arctan(t). \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u'(t) = t \\ v'(t) = \frac{1}{1+t^2}. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[\frac{t^2}{2} \arctan(t) \right]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x \frac{t^2}{2} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} [t - \arctan(t)]_{t=0}^{t=x} \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{x - \arctan(x)}{2}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & y \text{ solution de } (E) \\ \Leftrightarrow & \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad \lambda(x) = \frac{x^2+1}{2} \arctan(x) - \frac{x}{2} + C \\ \Leftrightarrow & \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad y(x) = \lambda(x)y_0(x) = \frac{(x^2+1)(x+1)}{2x} \arctan(x) - \frac{x+1}{2} + C \frac{x+1}{x}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{(x^2+1)(x+1)}{2x} \arctan(x) - \frac{x+1}{2} + C \frac{x+1}{x} \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}.$$

3.5 Les fonctions $a : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et $b : x \mapsto \sin(x)$ sont continues sur $I =]1; +\infty[$, donc

$$(E) \text{ admet des solutions sur } I .$$

Soient λ une fonction dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $y(x) = \lambda(x)y_0(x)$. La fonction y est dérivable sur I et on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
 & y \text{ solution de } (E) \\
 \Leftrightarrow & \quad \forall x \in I, \quad \lambda'(x)y_0(x) + \underbrace{\lambda(x)y_0'(x) + \frac{1}{1+x}\lambda(x)y_0(x)}_{=0} = \sin(x) \\
 \Leftrightarrow & \quad \forall x \in I, \quad \lambda'(x)y_0(x) = \sin(x) \quad \text{car } y_0 \text{ solution de l'équation homogène} \\
 \Leftrightarrow & \quad \forall x \in I, \quad \lambda'(x) = \sin(x)(1+x) \quad \text{car } y_0(x) \neq 0.
 \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \sin(x)(1+x)$ est continue sur \mathbb{R} et admet donc des primitives sur \mathbb{R} et donc sur I . Soient $x \in \mathbb{R}$ et

$$F(x) = \int_0^x \sin(t)(1+t) dt.$$

Posons

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u(t) = -\cos(t) \\ v(t) = 1+t. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} u'(t) = \sin(t) \\ v'(t) = 1. \end{cases}$$

Donc par intégration par parties,

$$F(x) = [-(1+t)\cos(t)]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \cos(t) dt = 1 - (1+x)\cos(x) + \sin(x).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 y \text{ solution de } (E) & \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad \lambda(x) = \sin(x) - (1+x)\cos(x) + C \\
 & \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad y(x) = \lambda(x)y_0(x) = \frac{\sin(x) - (1+x)\cos(x) + C}{1+x}.
 \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(x) - (1+x)\cos(x) + C}{1+x} \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Savoir intégrer l'inverse d'un trinôme.

4.1 Soit Δ le discriminant de $x^2 - 7x + 10$. On a $\Delta = 49 - 40 = 9 > 0$. Donc les racines associées sont $x_1 = \frac{7-3}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{7+3}{2} = 5$. Donc la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3(x^2-7x+10)}$ est définie sur $]-\infty; 2[\cup]2; 5[\cup]5; +\infty[$.
 Donc f est définie et même continue sur $I = \mathbb{R}_*^* \subseteq]-\infty; 2[\cup]5; +\infty[$. Dès lors, f admet des primitives sur \mathbb{R}_*^* .
 De plus, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{(x-2)(x-5)}.$$

Par le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2; 5\}, \quad f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-5}.$$

Méthode 1. On a

$$a = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x \neq 2}} (x-2) f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x \neq 2}} \frac{1}{3(x-5)} = -\frac{1}{9}.$$

De même,

$$b = \lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x \neq 5}} (x-5) f(x) = \frac{1}{3(x-2)} = \frac{1}{9}.$$

Par conséquent,

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{1/9}{x-5} - \frac{1/9}{x-2}.$$

Méthode 2. On a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2; 5\}$,

$$f(x) = \frac{(a+b)x - (5a+2b)}{(x-2)(x-5)}.$$

Or on note qu'il suffit de vérifier le système suivant pour que la dernière assertion soit vraie :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -(5a+2b) = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ 5a-2a=3a = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{9} \\ a = -\frac{1}{9} \end{cases}.$$

On retrouve que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{1/9}{x-5} - \frac{1/9}{x-2}.$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$\forall x \in I, \quad F(x) = \frac{1}{9} \ln(|x-5|) - \frac{1}{9} \ln(|x-2|) = \frac{1}{9} \ln(5-x) - \frac{1}{9} \ln(2-x) \quad \text{car } x > 0.$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de f sur $I = \mathbb{R}_*^*$ est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_*^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{9} \ln\left(\frac{5-x}{2-x}\right) + C \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}.$$

4.2 La fonction f est continue sur $I =]-2; +\infty[$ donc f admet des primitives sur I . En effectuant la division euclidienne de X^3 par $X+2$, on note que

$$X^3 = (X+2)(X^2 - 2X + 4) - 8.$$

D'où,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4) - 8}{x+2} = x^2 - 2x + 4 - \frac{8}{x+2}.$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de f est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l}]-2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 8 \ln(x+2) + C \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}.$$

4.3 Soit Δ le discriminant de $x^2 + x + 4$. Calculons $\Delta = 1 - 16 < 0$. Donc la fonction f est définie et même continue sur \mathbb{R} et admet des primitives sur \mathbb{R} . De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+2}{x^2+x+4} = \frac{1}{2} \frac{2x+1}{x^2+x+4} + \frac{3}{2} \frac{1}{x^2+x+4} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2x+1}{x^2+x+4} + \frac{3}{2} \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2x+1}{x^2+x+4} + \frac{3}{2} \times \frac{4}{15} \frac{1}{1 + \frac{4}{15} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, une primitive de f est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln(|x^2 + x + 4|) + \frac{2}{5} \times \frac{\sqrt{15}}{2} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de f est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 4) + \frac{\sqrt{15}}{5} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right) + C \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}.$$

4.4 Pour tout $x > 0$, on a $x^3 + 3x^2 + 2x > 0 + 3 \times 0 + 2 \times 0 = 0$. Donc la fonction f est continue sur $I = \mathbb{R}_+^*$ et admet donc des primitives sur I . De plus, on a

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{1}{x(x^2 + 3x + 2)} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}.$$

Par le théorème de décomposition en éléments simples, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1; 0\}, \quad f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

Méthode 1. On a

$$a = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} x f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{2}$$

De même,

$$b = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x \neq -1}} (x+1) f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x \neq -1}} \frac{1}{x(x+2)} = -1.$$

Enfin,

$$c = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x \neq -2}} (x+2) f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x \neq -2}} \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent,

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{1/2}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1/2}{x+2}$$

Méthode 2. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad f(x) &= \frac{a(x^2 + 3x + 2) + b(x^2 + 2x) + C(x^2 + x)}{x(x+1)(x+2)} \\ \Leftrightarrow \forall x \in I, \quad f(x) &= \frac{(a+b+c)x^2 + (3a+2b+c)x + 2a}{x(x+1)(x+2)}. \end{aligned}$$

Or on note qu'il suffit de vérifier le système suivant pour que la dernière assertion soit vraie :

$$\begin{aligned} \begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \\ 2a=1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b+c=-\frac{1}{2} \\ 2b+c=-\frac{3}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b+c=-\frac{1}{2} \\ b=-1 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &&&\Leftrightarrow \begin{cases} c=-\frac{1}{2} - b = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \\ b=-1 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, on retrouve que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{1/2}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1/2}{x+2}$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$\forall x \in I, \quad F(x) = \frac{1}{2} \ln(|x|) - \ln(|x+1|) + \frac{1}{2} \ln(|x+2|) = \frac{1}{2} \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x+2) \quad \text{car } x > 0.$$

Donc l'ensemble des primitives de f sur $I = \mathbb{R}_+^*$ est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x+2) + C \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}.$$

4.5 Soit Δ le discriminant de $x^2 - 2x + 4$. On a $\Delta = 4 - 16 < 0$. Donc la fonction $f : x \mapsto \frac{6x^2 - 11x + 24}{2(x^2 - 2x + 4)}$ est définie et même continue sur \mathbb{R} et donc admet des primitives sur \mathbb{R} . Commençons par effectuer la division euclidienne de $6X^2 - 11X + 24$ par $X^2 - 2X + 4$. On a

$$6X^2 - 11X + 24 = 6(X^2 - 2X + 4) + X.$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{6(x^2 - 2x + 4) + x}{2(x^2 - 2x + 4)} = \frac{6}{2} + \frac{x}{2(x^2 - 2x + 4)} = 3 + \frac{x}{2(x^2 - 2x + 4)}.$$

On note que $u : x \mapsto 2x^2 - 4x + 4$ est dérivable sur \mathbb{R} et $u' : x \mapsto 4x - 4$. Or $x = \frac{1}{4}(4x - 4) + 1$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 3 + \frac{1}{4} \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{1}{2(x^2 - 2x + 4)}.$$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2(x^2 - 2x + 4)}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(x-1)^2 - 1 + 4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(x-1)^2 + 3} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

Par conséquent une primitive de g est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \frac{1}{6} \times \sqrt{3} \arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = 3x + \frac{1}{4} \ln(|u(x)|) + \frac{\sqrt{3}}{6} \arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de f est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x + \frac{1}{4} \ln(2x^2 - 4x + 4) + \frac{\sqrt{3}}{6} \arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + C \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}.$$

5. Savoir faire un changement de variable.

5.1 La fonction $t \mapsto \sin(t) \cos^5(t)$ est continue sur \mathbb{R} et donc sur $[0; \frac{\pi}{2}]$. Donc I existe. Posons $u = \cos(t)$. $t \mapsto \cos(t)$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $du = -\sin(t) dt$. Par conséquent,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cos^5(t) dt = \int_1^0 u^5 (-1) du = \int_0^1 u^5 du = \left[\frac{u^6}{6} \right]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{6}.$$

Conclusion,

$$I = \frac{1}{6}.$$

5.2 Pour tout $x \in [-1; 1]$, $x^2 \leq 1$ et donc $1 - x^2$. Donc la fonction $f : x \mapsto x^2 \sqrt{1 - x^2}$ est définie et même continue sur $[-1; 1]$. Soient $x \in [-1; 1]$ et

$$F(x) = \int_0^x t^2 \sqrt{1 - t^2} dt.$$

Posons $t = \cos(u)$ i.e. $u = \arccos(t)$. La fonction $u \mapsto \cos(u)$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $dt = -\sin(u) du$. Ainsi,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x t^2 \sqrt{1 - t^2} dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos(x)} \cos^2(u) \sqrt{1 - \cos^2(u)} (-\sin(u)) du \\ &= \int_{\arccos(x)}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) \sqrt{\sin^2(u)} \sin(u) du \\ &= \int_{\arccos(x)}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) \sin^2(u) du && \text{car } \sin(u) \geq 0 \text{ pour } u \in [0; \pi] \\ &= \int_{\arccos(x)}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \sin(2u) \right)^2 du \\ &= \int_{\arccos(x)}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(4u)}{4} du \\ &= \left[\frac{u}{8} - \frac{\sin(4u)}{32} \right]_{u=\arccos(x)}^{u=\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{16} - \frac{\sin(2\pi)}{32} - \frac{\arccos(x)}{8} + \frac{\sin(4 \arccos(x))}{32} \\ &= \frac{\pi}{16} - \frac{\arccos(x)}{8} + \frac{2 \sin(2 \arccos(x)) \cos(2 \arccos(x))}{32} \\ &= \frac{\pi}{16} - \frac{\arccos(x)}{8} + \frac{4 \sin(\arccos(x)) \cos(\arccos(x)) (2 \cos^2(\arccos(x)) - 1)}{32} \\ &= \frac{\pi}{16} - \frac{\arccos(x)}{8} + \frac{\sqrt{1 - x^2} x (2x^2 - 1)}{8}. \end{aligned}$$

L'ensemble des primitives de f sur $[-1; 1]$ est donc donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\pi + 2\sqrt{1 - x^2} (2x^2 - 1) x - 2 \arccos(x)}{8} + C \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}.$$

5.3 La fonction $t \mapsto \arctan(t) \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* et donc notamment sur $[\frac{1}{2}; 2]$ et donc I existe. De plus en posant $u = \frac{1}{t}$, et donc $t = \frac{1}{u}$. La fonction $u \mapsto \frac{1}{u}$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et $dt = -\frac{du}{u^2}$ on a

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \arctan(t) \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arctan\left(\frac{1}{u}\right) (1 + u^2) \frac{-1}{u^2} du \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(u)\right) \left(\frac{1}{u^2} + 1\right) du && \text{car } u > 0 \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{u^2} + 1 du - I \\ &= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{u} + u \right]_{u=\frac{1}{2}}^{u=2} - I \\ &= \frac{\pi}{2} \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 \right) - I \\ &= \frac{3\pi}{2} - I. \end{aligned}$$

Donc $2I = \frac{3\pi}{2}$. Conclusion,

$$I = \frac{3\pi}{4}.$$

5.4 La fonction $f : x \mapsto \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$ est continue sur \mathbb{R} donc admet des primitives sur \mathbb{R} . Posons $x \in \mathbb{R}$ et

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{2t}}{e^t + 1} dt.$$

En effectuant le changement de variable $u = e^t$ i.e. $t = \ln(u)$. La fonction $u \mapsto \ln(u)$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et $dt = \frac{du}{u}$, on a

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^{e^x} \frac{u^2}{u+1} \frac{1}{u} du \\ &= \int_1^{e^x} \frac{u}{u+1} du \\ &= \int_1^{e^x} 1 - \frac{1}{u+1} du \\ &= [u - \ln(|u+1|)]_{u=1}^{u=e^x} \\ &= e^x - \ln(e^x + 1) - 1 + \ln(2). \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des primitives de f est

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x - \ln(e^x + 1) + C \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}.$$

5.5 Pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x) \geq 0$ et donc $1 + \cos(x) \geq 1 > 0$. Donc $x \mapsto \frac{1}{1 + \cos(x)}$ est définie et même continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$. Donc I existe. Posons $t = \tan(\frac{x}{2})$ alors $x = 2 \arctan(t)$. La fonction $t \mapsto 2 \arctan(t)$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ et par les formules de l'angle moitié, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos(x)} dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{2}{1+t^2 + 1-t^2} dt \\ &= \int_0^1 1 dt = 1. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{I = 1.}$$