

Correction de l'interrogation 11
d'entraînement
Equations différentielles d'ordre 2 et calcul
dans \mathbb{R}

1. Restituer le cours.

1.1 Soient $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, I un intervalle de \mathbb{R} , $d_1 : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $d_2 : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions continues sur I et (E_1) , (E_2) et (E) les équations suivantes :

$$\begin{aligned} (E_1) \quad & \forall x \in I, \quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_1(x) \\ (E_2) \quad & \forall x \in I, \quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_2(x) \\ (E) \quad & \forall x \in I, \quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d_1(x) + d_2(x). \end{aligned}$$

Si y_1 est une solution de (E_1) et si y_2 est une solution de (E_2) alors $y_1 + y_2$ est une solution de (E) .

1.2 Soient $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$, I un intervalle de \mathbb{R} , $d : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur I , $t_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$. Alors le problème de Cauchy

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} (E) & \forall t \in I, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t) \\ y(t_0) = y_0 \text{ et } y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

admet une unique solution.

1.3 Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On a les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} A \text{ est majorée} & \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, \quad x \leq M \\ A \text{ est minorée} & \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, \quad m \leq x \\ A \text{ est bornée} & \Leftrightarrow \exists (M, m) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in A, \quad m \leq x \leq M. \end{aligned}$$

1.4 Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On a l'équivalence suivante :

$$A \text{ est bornée} \quad \Leftrightarrow \quad \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, \quad |x| \leq M.$$

1.5 Soient $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $(m, M) \in \mathbb{R}^2$. On a les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} m = \min(A) & \Leftrightarrow m \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, \quad m \leq x \\ M = \max(A) & \Leftrightarrow M \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, \quad x \leq M. \end{aligned}$$

1.6 Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. On a les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} \sup(A) &= \min \{ M \in \mathbb{R} \mid M \text{ majore } A \} \\ \inf(A) &= \max \{ m \in \mathbb{R} \mid m \text{ minore } A \}. \end{aligned}$$

2. Manipuler la valeur absolue dans des inéquations.

2.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère l'équation $(E) : |2x - 4| \leq |x - 1|$. On note que

$$2x - 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 2 \quad \text{et} \quad x - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1.$$

Premier cas, $x \leq 1$. Alors

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad 4 - 2x \leq 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad 3 \leq x$$

ce qui est impossible car $x \leq 1$. Donc l'ensemble solution dans ce cas est $\mathcal{S}_1 = \emptyset$.

Deuxième cas, $1 \leq x \leq 2$. Alors

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad 4 - 2x \leq x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 5 \leq 3x \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{5}{3} < \frac{6}{3} = 2.$$

Donc l'ensemble solution dans ce cas est $\mathcal{S}_2 = \left[\frac{5}{3}; 2\right]$.

Troisième cas, $x \geq 2$. Alors

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 4 \leq x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 3.$$

Donc l'ensemble solution dans ce cas est $\mathcal{S}_3 = [2; 3]$.

Conclusion, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 = \left[\frac{5}{3}; 3\right].$$

2.2 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $(E) : \ln(|x-1|) - 2\ln(|x|) + \ln(|x+1|) < 1$. L'équation (E) a un sens si et seulement si

$$(x-1 \neq 0 \quad \text{ET} \quad x \neq 0 \quad \text{ET} \quad x+1 \neq 0) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1; 1\}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1; 1\}$. On a

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{|x-1||x+1|}{|x|^2}\right) < 1 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{|x^2-1|}{x^2}\right) < 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{|x^2-1|}{x^2} < e \quad \text{car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\Leftrightarrow |x^2-1| < e x^2 \quad \text{car } x^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow -e x^2 < x^2 - 1 < e x^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (e+1)x^2 > 1 \\ (e-1)x^2 > -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > \frac{1}{e+1} \\ x^2 > \underbrace{\frac{-1}{e-1}}_{< 0} \end{cases} \quad \text{toujours vrai} \quad \text{car } e+1 > e-1 > 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{e+1} \\ &\Leftrightarrow x < -\frac{1}{\sqrt{e+1}} \quad \text{OU} \quad x > \frac{1}{\sqrt{e+1}}. \end{aligned}$$

On note que $-1 < -\frac{1}{\sqrt{e+1}} < 0 < -\frac{1}{\sqrt{e+1}} < 1$ Ainsi l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} =]-\infty; -1[\cup]-1; -\frac{1}{\sqrt{e+1}}[\cup \left[\frac{1}{\sqrt{e+1}}; 1[\cup]1; +\infty[.$$

2.3 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(E) : \sqrt{|x^2-1|} \leq x-5$. On a $|x^2-1| \geq 0$ donc (E) est bien définie sur \mathbb{R} .

Premier cas, si $x < 5$, alors $x-5 < 0 \leq \sqrt{|x^2-1|}$. Donc (E) n'a pas de solution strictement inférieure à 5.

Second cas, si $x \geq 5$. Alors,

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow |x^2-1| \leq (x-5)^2 \quad \text{car } |x^2-1| \geq 0 \text{ et } x-5 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -(x-5)^2 \leq x^2-1 \leq (x-5)^2 \\ &\Leftrightarrow -x^2+10x-25 \leq x^2-1 \leq x^2-10x+25 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-10x+24 \geq 0 \\ 10x \leq 26 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+12 \geq 0 \\ x \leq \frac{13}{5} < \frac{25}{5} = 5 \text{ impossible.} \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

2.4 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(E) : |2x - 3| + |3 - x| - |x - 7| \leq 2$. On note que

$$2x - 3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad 3 - x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 3 \quad \text{et} \quad x - 7 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 7.$$

Premier cas, si $x \leq \frac{3}{2}$, alors

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad 3 - 2x + 3 - x + x - 7 \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leq 2x \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{2} \leq x.$$

Donc dans ce cas l'ensemble solution est $\mathcal{S}_1 = [-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}]$.

Deuxième cas, si $\frac{3}{2} \leq x \leq 3$, alors

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 3 + 3 - x + x - 7 \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \leq 9 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{9}{2} \text{ toujours vrai car } x \leq 3 = \frac{6}{2}.$$

Donc dans ce cas l'ensemble solution est $\mathcal{S}_2 = [\frac{3}{2}; 3]$.

Troisième cas, si $3 \leq x \leq 7$, alors

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 3 + x - 3 + x - 7 \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x \leq 15 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{15}{4}.$$

Donc dans ce cas l'ensemble solution est $\mathcal{S}_3 = [3; \frac{15}{4}]$.

Quatrième cas, si $x \geq 7$, alors

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 3 + x - 3 - x + 7 \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{2} \quad \text{impossible car } x \geq 7.$$

Donc dans ce cas l'ensemble solution est $\mathcal{S}_4 = \emptyset$.

Conclusion l'ensemble solution est

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4 = \left[-\frac{3}{2}; \frac{15}{4} \right].$$

2.5 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} |x^2 - 8x + 11| \leq 4 & \Leftrightarrow -4 \leq x^2 - 8x + 11 \leq 4 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 15 \geq 0 \\ x^2 - 8x + 7 \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Soit Δ_1 le discriminant de $x^2 - 8x + 15$. On a $\Delta_1 = 64 - 4 \times 15 = 4(16 - 15) = 4$. Donc les racines associées sont

$$x_1 = \frac{8 - 2}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8 + 2}{2} = 5.$$

Soit maintenant Δ_2 le discriminant de $x^2 - 8x + 7$. On a $\Delta_2 = 64 - 4 \times 7 = 4(16 - 7) = 4 \times 9 = 36$. Donc les racines associées sont

$$x_3 = \frac{8 - 6}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_4 = \frac{8 + 6}{2} = 7.$$

Par conséquent,

$$|x^2 - 8x + 11| \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq 3 & \text{OU } x \geq 5 \\ 1 \leq x \leq 7. \end{cases}$$

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\mathcal{S} = [1; 3] \cup [5; 7].$$

3. Savoir déterminer les solutions d'une équation homogène d'ordre 2.

3.1 Soit $(E_c) : r^2 + 2r - 15 = 0$ l'équation caractéristique associée et Δ son discriminant. On a $\Delta = 4 + 60 = 64$. Donc les racines de (E_c) sont :

$$r_1 = \frac{-2 + 8}{2} = 3 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-2 - 8}{2} = -5.$$

Donc les solutions de (E_0) sont

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} t \mapsto C_1 e^{3t} + C_2 e^{-5t} \\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right. \right\}.$$

On a donc pour y une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} l'équivalence suivante :

$$y \text{ solution de } (\mathcal{P}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, & y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-5t} \\ y(0) = C_1 + C_2 = 8 \\ y'(0) = 3C_1 - 5C_2 = 8. \end{cases}$$

Or pour $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} C_1 + C_2 = 8 \\ 3C_1 - 5C_2 = 8 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 8 - C_1 \\ 3C_1 - 40 + 5C_1 = 8C_1 - 40 = 8 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 8 - C_1 \\ C_1 = \frac{48}{8} = 6 \end{cases} \\ & & \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 2 \\ C_1 = \frac{48}{8} = 6. \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion, on trouve bien une unique solution à notre problème de Cauchy (\mathcal{P}) , donnée par

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y : t \mapsto 6e^{3t} + 2e^{-5t}. \end{array}}$$

3.2 Soit $(E_c) : r^2 + r + \frac{5}{2} = 0$ l'équation caractéristique associée et Δ son discriminant. On a $\Delta = 1 - 10 = -9$.
Donc les racines de (E_c) sont :

$$r_1 = \frac{-1 + 3i}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-1 - 3i}{2}.$$

Donc les solutions de (E_0) sont

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \left(C_1 \cos\left(\frac{3t}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \right) \\ (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right. \right\}.$$

On a donc pour y une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} & y \text{ solution de } (\mathcal{P}) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, & y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(C_1 \cos\left(\frac{3t}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \right) \\ y(\pi) = -C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} = -e^{-\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow C_2 = 1 \\ y'(\pi) = \frac{7}{2} e^{-\frac{\pi}{2}}. \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \exists C_1 \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, & y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(C_1 \cos\left(\frac{3t}{2}\right) + \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \right) \\ y'(\pi) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{2}} (-1) + e^{-\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{3}{2} C_1 (-1) + 0 \right) = \frac{7}{2} e^{-\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{3}{2} C_1 = \frac{7}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \exists C_1 \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, & y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(C_1 \cos\left(\frac{3t}{2}\right) + \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \right) \\ C_1 = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion, on trouve bien une unique solution à notre problème de Cauchy (\mathcal{P}) , donnée par

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y : t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \left(2 \cos\left(\frac{3t}{2}\right) + \sin\left(\frac{3t}{2}\right) \right). \end{array}}$$

3.3 Soit $(E_c) : r^2 - 16r + 64 = 0$ l'équation caractéristique associée et Δ son discriminant. On a $\Delta = 16^2 - 4 \times 64 = 8^2 \times 4 - 4 \times 8^2 = 0$. Donc l'unique racine de (E_c) est :

$$r_0 = \frac{16}{2} = 8.$$

Donc les solutions de (E_0) sont

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \left. \begin{array}{l} t \mapsto e^{8t} (C_1 t + C_2) \end{array} \right| (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On a donc pour y une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} l'équivalence suivante :

$$y \text{ solution de } (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = e^{8t} (C_1 t + C_2) \\ y(1) = e^8 (C_1 + C_2) = e^2 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = e^{-6} \\ y'(1) = 8e^8 (C_1 + C_2) + C_1 e^8 = e^2 \Leftrightarrow 9C_1 + 8C_2 = e^{-6}. \end{cases}$$

Or pour $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \begin{cases} C_1 + C_2 = e^{-6} \\ 9C_1 + 8C_2 = e^{-6} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = e^{-6} - C_1 \\ 9C_1 + 8e^{-6} - 8C_1 = e^{-6} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = e^{-6} - C_1 \\ C_1 = -7e^{-6} \end{cases} \\ &&&\Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = e^{-6} + 7e^{-6} = 8e^{-6} \\ C_1 = -7e^{-6} \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion, on trouve bien une unique solution à notre problème de Cauchy (\mathcal{P}) , donnée par

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y : t \mapsto (-7t + 8) e^{8t-6}. \end{array}}$$

3.4 Soit $(E_c) : r^2 - 3r + (3 - i) = 0$ l'équation caractéristique associée et Δ son discriminant. On a $\Delta = 9 - 12 + 4i = -3 + 4i$. Soit $\delta = a + ib \in \mathbb{C}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \delta^2 = \Delta &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 2iab = -3 + 4i \\ |\delta|^2 = |\Delta| \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = 4 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{9 + 16} = 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \\ ab = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} \quad \text{car } ab \geq 0. \end{aligned}$$

Posons $\delta = 1 + 2i$. Alors les racines de (E_c) sont :

$$r_1 = \frac{3 + 1 + 2i}{2} = 2 + i \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{3 - 1 - 2i}{2} = 1 - i.$$

Donc les solutions de (E_0) sont

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \left. \begin{array}{l} t \mapsto C_1 e^{(2+i)t} + C_2 e^{(1-i)t} \end{array} \right| (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

On a donc pour y une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} l'équivalence suivante :

$$y \text{ solution de } (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = C_1 e^{(2+i)t} + C_2 e^{(1-i)t} \\ y(0) = C_1 + C_2 = 1 \\ y'(0) = (2 + i)C_1 + (1 - i)C_2 = 1 + 2i. \end{cases}$$

Or pour $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$,

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ (2+i)C_1 + (1-i)C_2 = 1 + 2i \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 1 - C_1 \\ (2+i)C_1 + 1 - i - (1-i)C_1 = 1 + 2i \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 1 - C_1 \\ (1+2i)C_1 = 3i \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 1 - C_1 \\ C_1 = \frac{3i}{1+2i} = \frac{3i(1-2i)}{1+4} = \frac{6+3i}{5} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 1 - \frac{6+3i}{5} = \frac{-1-3i}{5} \\ C_1 = \frac{6+3i}{5} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Conclusion, on trouve bien une unique solution à notre problème de Cauchy (\mathcal{P}), donnée par

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y : t \mapsto \frac{6+3i}{5} e^{(1-i)t} - \frac{1+3i}{5} e^{(2+i)t} \end{array}}$$

3.5 Soit $(E_c) : r^2 + (1+i)r + i = 0$ l'équation caractéristique associée et Δ son discriminant. On a $\Delta = (1+i)^2 - 4i = 1 + 2i - 1 - 4i = 1 - 2i - 1 = (1-i)^2$.

NB : si vous n'avez pas vu directement la factorisation surtout ne poser pas $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$ car on connaît la forme trigonométrique de $-2i = 2e^{\frac{3i\pi}{2}}$ dont les racines sont $\pm\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$. On retrouve alors $1-i$ et $-1+i$ en développant.

Les racines de (E_c) sont donc

$$r_1 = \frac{-1-i+1-i}{2} = -i \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-1-i-1+i}{2} = -1.$$

Donc les solutions de (E_0) sont

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto C_1 e^{-it} + C_2 e^{-t} \end{array} \middle| (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

On a donc pour y une fonction deux fois dérivable sur \mathbb{R} l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned}
 y \text{ solution de } (\mathcal{P}) &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = C_1 e^{-it} + C_2 e^{-t} \\ y(0) = C_1 + C_2 = 2 \\ y'(0) = -iC_1 - C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = -iC_1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = C_1 e^{-it} + C_2 e^{-t} \\ y(0) = C_1 - iC_1 = 2 \Leftrightarrow C_1 = \frac{2}{1-i} = 1+i \\ C_2 = -i(1+i) = 1-i \end{cases}
 \end{aligned}$$

Conclusion, on trouve bien une unique solution à notre problème de Cauchy (\mathcal{P}), donnée par

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y : t \mapsto (1+i)e^{-it} + (1-i)e^{-t} \end{array}}$$

4. Savoir déterminer une solution particulière.

4.1 Soit $(E_c) : r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2 = 0$ l'équation caractéristique associée à (E) . L'unique racine double de (E_c) est donc $r_0 = -2$ et non 2! On pose en conséquence $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, y_p(t) = (at + b)e^{2t}.$$

La fonction y_p est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 y_p'(t) &= (a + 2at + 2b)e^{2t} = (2at + 2b + a)e^{2t} \\
 y_p''(t) &= (2a + 4at + 4b + 2a)e^{2t} = (4at + 4b + 4a)e^{2t}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 & y_p \text{ est solution de } (E) \\
 \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4at + 4b + 4a)e^{2t} + 4(2at + 2b + a)e^{2t} + 4(at + b)e^{2t} = (t + 1)e^{2t} \\
 \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, \quad (4a + 8a + 4a)t + 4b + 4a + 8b + 4a + 4b = t + 1 \quad \text{car } e^{2t} \neq 0 \\
 \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, \quad 16at + 16b + 8a = t + 1.
 \end{aligned}$$

On note que la dernière assertion est vrai si

$$\begin{cases} 16a = 1 \\ 16b + 8a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{16} \\ b = \frac{1-8a}{16} = \frac{1-\frac{1}{2}}{16} = \frac{1}{32}. \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y_p : t \mapsto \frac{2t+1}{32} e^{2t} \text{ est une solution de } (E). \end{array}}$$

4.2 Soit $(E_c) : r^2 + r - 2 = 0$ l'équation caractéristique associée à (E) et Δ son discriminant. On a $\Delta = 1 + 8 = 9$ donc les racines de (E_c) sont

$$r_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-1-3}{2} = -2.$$

Puisque 1 est une racine simple de (E_c) , on pose $a \in \mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_p(t) = at e^t.$$

La fonction y_p est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 y_p'(t) &= a(t+1)e^t \\
 y_p''(t) &= a(t+1+1)e^t = a(t+2)e^t.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 y_p \text{ est solution de } (E) & \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad a(t+2)e^t + a(t+1)e^t - 2ate^t = 9e^t \\
 & \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad a(2t - 2t + 2 + 1) = 9 \quad \text{car } e^t \neq 0 \\
 & \Leftrightarrow 3a = 9.
 \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y_p : t \mapsto 3te^t \text{ est une solution de } (E). \end{array}}$$

4.3 Puisque le second membre est polynomiale, il est inutile de chercher les solutions de l'équation caractéristique. Soient $(a_3, a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^4$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_p(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0.$$

La fonction y_p est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 y_p'(t) &= 3a_3t^2 + 2a_2t + a_1 \\
 y_p''(t) &= 6a_3t + 2a_2.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 & y_p \text{ est solution de } (E) \\
 \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, \quad 6a_3t + 2a_2 - 3(3a_3t^2 + 2a_2t + a_1) + 2(a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0) = 4t^3 - 6t + 4 \\
 \Leftrightarrow & \forall t \in \mathbb{R}, \quad 2a_3t^3 + (2a_2 - 9a_3)t^2 + (2a_1 - 6a_2 + 6a_3)t + 2a_0 - 3a_1 + 2a_2 = 4t^3 - 6t + 4.
 \end{aligned}$$

On note que pour la dernière assertion soit vraie, il suffit que

$$\begin{cases} 2a_3 = 4 \\ 2a_2 - 9a_3 = 0 \\ 2a_1 - 6a_2 + 6a_3 = -6 \\ 2a_0 - 3a_1 + 2a_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_3 = 2 \\ a_2 = \frac{9a_3}{2} = 9 \\ a_1 = \frac{-6+6a_2-6a_3}{2} = \frac{-6+54-12}{2} = 18 \\ a_0 = \frac{4+3a_1-2a_2}{2} = \frac{4+54-18}{2} = 20. \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y_p : t \mapsto 2t^3 + 9t^2 + 18t + 20 \end{array} \text{ est une solution de } (E).}$$

4.4 Soit $(E_c) : r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2 = 0$ l'équation caractéristique associée à (E) . Puisque 2 est une racine double de (E_c) , on pose $a \in \mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_p(t) = at^2 e^{2t}.$$

La fonction y_p est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= a(2t^2 + 2t) e^{2t} \\ y_p''(t) &= a(4t^2 + 4t + 4t + 2) e^{2t} = a(4t^2 + 8t + 2) e^{2t}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad a(4t^2 + 8t + 2) e^{2t} - 4a(2t^2 + 2t) e^{2t} + 4at^2 e^{2t} = 5 e^{2t} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad a(4t^2 + 8t + 2 - 8t^2 - 8t + 4t^2) = 5 \quad \text{car } e^{2t} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow 2a = 5. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ y_p : t \mapsto \frac{5t^2}{2} e^{2t} \end{array} \text{ est une solution de } (E).}$$

4.5 Soit $(E_c) : r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -4 \Leftrightarrow r = \pm 2i$ l'équation caractéristique associée à (E) . On considère l'équation

$$(F) \quad \forall t \in I, \quad y''(t) + 4y(t) = (1 + t) e^{2it}.$$

Puisque $2i$ est une racine simple de (E_c) . On pose $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z_p(t) = t(at + b) e^{2it} = (at^2 + bt) e^{2it}.$$

La fonction y_p est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} z_p'(t) &= (2iat^2 + 2ibt + 2at + b) e^{2it} = (2iat^2 + 2(a + ib)t + b) e^{2it} \\ z_p''(t) &= (-4at^2 + 4i(a + ib)t + 2ib + 4iat + 2(a + ib)) e^{2it} = (-4at^2 + 4i(2a + ib)t + 2(a + 2ib)) e^{2it}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} z_p \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad (-4at^2 + 4i(2a + ib)t + 2(a + 2ib)) e^{2it} + 4(at^2 + bt) e^{2it} = (t + 1) e^{2it} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad -4at^2 + 4i(2a + ib)t + 2(a + 2ib) + 4at^2 + 4bt = t + 1 \quad \text{car } e^{2it} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad 8iat + 2a + 4ib = t + 1 \end{aligned}$$

On note alors que pour que la dernière assertion soit vraie, il suffit de vérifier

$$\begin{cases} 8ia = 1 \\ 2a + 4ib = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{i}{8} \\ b = \frac{1-2a}{4i} = \frac{1+i}{4i} = \frac{4+i}{16i} = -\frac{4i-1}{16} = \frac{1-4i}{16}. \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ z_p : t \mapsto \frac{-2it^2 + (1 - 4i)t}{16} e^{2it} = \frac{-2it^2 + (1 - 4i)t}{16} (\cos(2t) + i \sin(2t)) \end{array} \text{ est une solution de } (F).$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Re}(z_p(t)) = \frac{1}{16} (2t^2 \sin(2t) + t \cos(2t) + 4t \sin(2t)).$$

Conclusion,

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y_p = \operatorname{Re}(z_p) : t \mapsto \frac{2t^2 \sin(2t) + t \cos(2t) + 4t \sin(2t)}{16} \text{ est une solution de } (E).$$

5. Calculs d'équivalents.

5.1 On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(x)}{x} = 1$ donc $\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ par élévation au carré, $\operatorname{sh}^2(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = e^0 = 1.$$

Donc $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$. On observe alors que

$$3x^5 \underset{x \rightarrow 0}{\ll} \operatorname{sh}^2(x) \underset{x \rightarrow 0}{\ll} e^x - 1$$

Donc

$$3x^5 - \operatorname{sh}^2(x) + e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

Posons $u(x) = 3x^5 - \operatorname{sh}^2(x) + e^x - 1$. Puisque $u(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Or $\sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ (car $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$), donc

$$f(x) = \sin(u(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} u(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

Conclusion,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

5.2 On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin(e^x) \leq 1$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -e^{-x} \leq \frac{\sin(e^x)}{e^x} \leq e^{-x}.$$

Or $e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Donc par encadrement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(e^x)}{e^x} = 0.$$

Autrement dit : $\sin(e^{2x}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\ll} e^x$. De plus,

$$x^{\ln(x)} = e^{\ln(x) \ln(x)} = e^{\ln^2(x)}.$$

Donc

$$\frac{x^{\ln(x)}}{e^x} = e^{\ln^2(x) - x} = e^{-x(1 - \frac{\ln^2(x)}{x})}.$$

Par croissance comparée, $\frac{\ln^2(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. donc $-x(1 - \frac{\ln^2(x)}{x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ et ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln(x)}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x(1 - \frac{\ln^2(x)}{x})} = 0.$$

D'où, $x^{\ln(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\ll} e^x$. Ainsi,

$$f(x) = \sin(e^{2x}) + x^{\ln(x)} + 5e^x + 3\operatorname{ch}(x) = \sin(e^{2x}) + x^{\ln(x)} + \frac{13}{2}e^x + \frac{3}{2}e^{-x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{13}{2}e^x.$$

Conclusion,

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{13}{2}e^x.$$

5.3 On note que

$$e^{x^2+5x+3+\frac{7}{x}-\frac{1}{x^2}} = e^{x^2+5x+3} e^{\frac{7}{x}-\frac{1}{x^2}}.$$

De plus, $\frac{7}{x} - \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et donc $e^{\frac{7}{x}-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. Conclusion,

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{x^2+5x+3}.$$

Il est très important de noter qu'il est impossible de simplifier plus le résultat. Notamment affirmer $x^2 + 5x + 3 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$ implique $e^{x^2+5x+3} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{x^2}$ est FAUX !! En effet,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2+5x+3}}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{5x+3} = +\infty.$$

5.4 On remarque que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+x^5} + \frac{\sin(x)}{5} + \frac{\cos(x)}{2} + \frac{\tan(x)}{3} + \frac{e^x}{2} = 0 + 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1.$$

Donc par composition,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \neq 0.$$

Conclusion,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi}{4}.$$

5.5 On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(u)}{u} = 1$. Donc $\arcsin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$. Posons $u(x) = x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Donc par composition, $\arcsin(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$. D'autre part et de même, on a $\tan(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$, avec $u = x^3 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc $\tan(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^3$. Enfin, $x \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \times 1 = x$. Donc on en déduit que

$$\tan^3(x) \underset{x \rightarrow 0}{\ll} \arcsin(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\ll} x \cos(x).$$

Dès lors,

$$\arcsin(x^2) + \tan^3(x) + x \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

Par élévation à la puissance 5, on conclut que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^5.$$

5.6 On note que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) + e^{-x} + \frac{5}{x} = \frac{\pi}{2} + 0.$$

Donc

$$\arctan(x) + e^{-x} + \frac{5}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}.$$

Par croissance comparée, on a

$$\ln^7(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\ll} x^2.$$

De plus,

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(x)}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^0 = 1 \quad \text{par croissance comparée.}$$

Donc $x^{\frac{1}{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\ll} x^2$. Ainsi,

$$x^2 + \ln^7(x) + x^{\frac{1}{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2.$$

Par quotient, on obtient que

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{\pi}{2}}{x^2} = \frac{\pi}{2x^2}.$$