# Interrogation 12 d'entrainement
# Calculs dans R et matriciels

1. **Restituer le cours.**
   1.1 Donner la définition de la borne inférieure, supérieure d'une partie.
   1.2 Donner une condition suffisante à l'existence de la borne supérieure, inférieure.
   1.3 Donner la définition d'un intervalle.
   1.4 Définir la partie entière.
   1.5 Traduire le fait que $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   1.6 Donner la caractérisation de l'inversibilité (et non la définition : cf théorème II.4)
   1.7 Enoncer la formule de Bernoulli et du binôme de Newton pour deux matrices.
   1.8 Enoncer la proposition donnant l'inverse du produit.

   **Révisions**

   1.9 Tracer le graphe de la fonction exponentielle / logarithme / cosinus hyperbolique / sinus hyperbolique /arccosinus / arcsinus / arctan, y faire apparaitre les valeurs remarquables, les tangentes remarquables, les asymptotes remarquables.
   1.10 Enoncer la croissance comparée du logarithme en $+\infty$/en 0, de l'exponentielle en $-\infty$/en $+\infty$.
   1.11 Donner le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction exponentielle / logarithme / cosinus hyperbolique / sinus hyperbolique / arccosinus / arcsinus / arctan.
   1.12 Enoncer la formule reliant les carrés des fonctions hyperboliques et celle sur arctan.

2. **Ecrire une matrice. Calcul matriciel élémentaire.** Sans justification, écrire la matrice et effectuer le calcul demandé.
   2.1 Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $a_{12} = a_{23} = 1$, $a_{13} = 0$, pour tout $i \in [\![1\,;\,3]\!]$, $a_{ii} = 0$ et pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,3]\!]^2$, $a_{ji} = a_{ij}$. Ecrire $A$ et calculer $A^2$.
   2.2 Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 4\\1\leqslant j\leqslant 3}} \in \mathscr{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,4]\!] \times [\![1\,;\,3]\!]$, $a_{ij} = 3(i-1)+j$. Ecrire $A$ et calculer $A^T$.
   2.3 Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [\![1\,;\,4]\!]$, $a_{ii} = 0$ et pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,4]\!]^2$, $i \neq j$, $a_{ij} = ij$. On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ecrire $A$ et calculer $AB$.
   2.4 Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,4]\!]^2$, $a_{ij} = (-1)^{i+j} j$. On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ecrire $A$ et calculer $BA$.
   2.5 Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 4}} \in \mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $j \in [\![1\,;\,4]\!]$, $a_{1j} = j$ et pour tout $(i,j) \in [\![2\,;\,3]\!] \times [\![1\,;\,4]\!]$, $a_{ij} = 2a_{i-1,j}$. Ecrire $A$ et calculer $A^T$.
   2.6 Soit $A = (a_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant 3} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telle que pour tout $(k,l) \in [\![1\,;\,3]\!]^2$, $a_{kl} = i^{k+l}$, *le $i$ complexe !* On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Ecrire $A$ et calculer $AB$.
   2.7 Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 4} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,4]\!]^2$, $a_{ij} = \min(i,j)$. On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ecrire $A$ et calculer calculer $AB$.

2.8 Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,2]\!]^2$, $a_{ij} = 0$ si $i = j$ et $a_{ij} = 1$ sinon. Ecrire $A$ et calculer $A^3$.

2.9 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$. On pose $A = (a_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(k,l) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$, $a_{kl} = \omega^{k-1}$ si $k = l$ et $a_{kl} = 0$ sinon. Ecrire $A$ et calculer $A^n$.

2.10 Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\ 1\leqslant j\leqslant 3}} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $j \in [\![1\,;\,3]\!]$, $a_{1j} = 5j$ et $a_{2j} = a_{1j} - 1$. On pose $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ecrire $A$ et calculer $AB$.

3. **Savoir manipuler la racine carrée dans des inéquations.**

3.1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x - 4\sqrt{x-4}} \geqslant 1$.

3.2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x - 1 \leqslant \sqrt{x+2}$.

3.3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x+2} \leqslant \sqrt{x+1} + 1$.

3.4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-2} \geqslant 3$.

3.5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x^2+5x+3} < x + 2$.

4. **Savoir donner la borne supérieure/inférieure.**

4.1 Soit $A = \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x-2| \leqslant 1 \,\}$. Déterminer sa borne inférieure, sa borne supérieure, son minimum et son maximum lorsqu'ils existent.

4.2 Soit $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^4 > 1 \right\}$. Déterminer sa borne inférieure, sa borne supérieure, son minimum et son maximum lorsqu'ils existent.

4.3 Soit $A = \left\{ \sin\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$. Déterminer sa borne inférieure, sa borne supérieure, son minimum et son maximum lorsqu'ils existent.

4.4 Soit $A$ une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. On pose $B = \{\, -x \mid x \in A \,\}$. Justifier que $A$ admet une borne inférieure, que $B$ admet une borne supérieure et montrer que $\sup(B) \leqslant -\inf(A)$.

4.5 Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, $x \leqslant y$. Justifier que $A$ admet une borne supérieure, que $B$ admet une borne inférieure et montrer que $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.

5. **Résoudre une équation différentielle d'ordre 2.**

5.1 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : y'' + 2y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}\cos(x)$.

5.2 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : y'' - 4y' + 3y = 3x - 5 + 2x^2\,\mathrm{e}^{-x}$.

5.3 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : y'' - 4y' + 4y = 2x\,\mathrm{e}^{2x}$.

5.4 Déterminer l'ensemble des solutions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $(E) : y''y - (y')^2 + 2yy' + 2y^2\ln(y) = 0$. *Indication : poser* $z = \ln(y)$.

5.5 Résoudre sur $]-1;1[$ l'équation $(E) : \left(1-x^2\right)y'' - \left(4\sqrt{1-x^2} + x\right)y' + 3y = 0$. *Indication : poser* $x = \sin(t)$.

5.6 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $(E) : 4xy'' + (2 - 8\sqrt{x})\,y' + 4y = 2\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}$. *Indication : poser* $t = \sqrt{x}$.