Correction de l'interrogation 12 d'entrainement
Calculs dans R et matriciels

1. **Restituer le cours.**

   1.1 Soient $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} a = \inf(A) &\quad \Leftrightarrow \quad a = \max\{m \in \mathbb{R} \mid m \text{ minore } A\} \\ b = \sup(A) &\quad \Leftrightarrow \quad b = \min\{M \in \mathbb{R} \mid M \text{ majore } A\}. \end{aligned}$$

   1.2 Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

   Si A est non vide et minorée alors A admet une borne inférieure.
   Si A est non vide et majorée alors A admet une borne supérieure.

   1.3 Soit $I \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall (a,b) \in I^2, \qquad [a;b] \subseteq I.$$

   1.4 Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$. Cet entier n est appelé partie entière de x : $n = \lfloor x \rfloor$.

   1.5 L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y,\ \exists r \in \mathbb{Q}, \quad x < r < y.$$

   De même l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y,\ \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad x < \alpha < y.$$

   1.6 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

   i. A est inversible
   ii. $\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = I_n$
   iii. $\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ BA = I_n$

   De plus dans chacun des cas, $B = A^{-1}$.

   1.7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}$ et $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. On suppose que A et B commutent i.e. $AB = BA$ alors,

   i. $(A+B)^m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$.

   ii. Si $m \neq 0$, $A^m - B^m = (A-B) \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} A^k B^{m-1-k}$.

   1.8 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si A et B sont inversibles alors AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

2. **Ecrire une matrice. Calcul matriciel élémentaire.** Dans chaque cas, on obtient :

   2.1 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   2.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ et $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$.

2.3 $A=\begin{pmatrix}0&2&3&4\\2&0&6&8\\3&6&0&12\\4&8&12&0\end{pmatrix}$ et $AB=\begin{pmatrix}3&-2\\8&-8\\3&-6\\16&8\end{pmatrix}$.

2.4 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\-1&2&-3&4\\1&-2&3&-4\\-1&2&-3&4\end{pmatrix}$ et $BA=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

2.5 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&6&8\\4&8&12&16\end{pmatrix}$ et $A^T=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&4&8\\3&6&12\\4&8&16\end{pmatrix}$.

2.6 $A=\begin{pmatrix}-1&-i&1\\-i&1&i\\1&i&-1\end{pmatrix}$ et $AB=\begin{pmatrix}-i&-2i&-3i&-4i\\1&2&3&4\\i&2i&3i&4i\end{pmatrix}$.

2.7 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&4\end{pmatrix}$ et $AB=\begin{pmatrix}0&2&2\\-1&4&1\\-2&4&0\\-2&4&-1\end{pmatrix}$.

2.8 $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ et $A^3=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}A=A$.

2.9 $A=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&\omega&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&\omega^{n-1}\end{pmatrix}$ et $A^n=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&\omega^n&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&\omega^{(n-1)n}\end{pmatrix}=I_n$ car $\omega\in\mathbb{U}_n$.

2.10 $A=\begin{pmatrix}5&10&15\\4&9&14\end{pmatrix}$ et $AB=\begin{pmatrix}5&25\\6&21\end{pmatrix}$.

3. **Savoir manipuler la racine carrée dans des inéquations.**

3.1 Soient $x\in\mathbb{R}$ et (E) : $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}\geqslant 1$. On a $x-4\geqslant 0 \iff x\geqslant 4$. Soit maintenant $x\geqslant 4$. On a alors

$$\begin{aligned} x-4\sqrt{x-4}\geqslant 0 &\iff x\geqslant 4\sqrt{x-4} &&\iff x^2\geqslant 16\,(x-4) \quad \text{car } x\geqslant 4\\ & &&\iff x^2-16x+64\geqslant 0\\ & &&\iff (x-8)^2\geqslant 0 \text{ toujours vrai.}\end{aligned}$$

Donc pour tout $x\geqslant 4$, (E) est bien définie. Soit $x\geqslant 4$. On a

$$\begin{aligned} (E) &\iff x-4\sqrt{x-4}\geqslant 1 && \text{car } x-4\sqrt{x-4}\geqslant 0\\ &\iff x-1\geqslant 4\sqrt{x-4}\\ &\iff (x-1)^2\geqslant 16\,(x-4) && \text{car } x-1\geqslant 0 \text{ car } x\geqslant 4\\ &\iff x^2-2x+1-16x+64\geqslant 0\\ &\iff x^2-18x+65\geqslant 0.\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant associé. On a

$$\Delta=4\times 9^2-4\times 65=4\,(81-65)=4\,(16)=8^2$$

Donc les racines associées sont $x_1=\frac{18-8}{2}=5$ et $x_2=\frac{18+8}{2}=13$. Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathscr{S}=[4\,;\,5]\cup[13\,;\,+\infty[\,.}$$

3.2 Soient $x\in\mathbb{R}$ et (E) : $x-1\leqslant\sqrt{x+2}$. L'équation (E) est bien définie si et seulement si $x\geqslant -2$. Soit $x\geqslant -2$.

Premier cas, $x \leqslant 1$, alors $x-1 \leqslant 0 \leqslant \sqrt{x+2}$ et (E) est donc vraie et l'ensemble solution dans ce cas est $\mathscr{S}_1 = [-2\,;\,1]$.
Second cas, $1 \leqslant x$, alors

$$\begin{array}{rcll} (E) & \Leftrightarrow & (x-1)^2 \leqslant x+2 & \text{car } x-1 \geqslant 0 \text{ et } x+2 \geqslant 0 \\ & \Leftrightarrow & x^2-2x+1 \leqslant x+2 & \\ & \Leftrightarrow & x^2-3x-1 \leqslant 0. & \end{array}$$

Soit Δ le discriminant associé. On a $\Delta = 9+4 = 13$. Donc les racines associées sont $x_1 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$. Or $9 < 13 < 16$ donc $3 < \sqrt{13} < 4$. Donc

$$-\frac{1}{2} < x_1 < 0 \qquad \text{et} \qquad 3 < x_2 < \frac{7}{2}.$$

Par conséquent dans ce cas, l'ensemble solution est $\mathscr{S}_2 = [1\,;\,x_2]$.
Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 = [-2\,;\,x_2] = \left[-2\,;\,\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right].}$$

3.3 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $(E) : \sqrt{x+2} \leqslant \sqrt{x+1}+1$. L'équation est bien définie si et seulement si $x \geqslant -2$ et $x \geqslant -1$ i.e. si et seulement si $x \geqslant -1$. Soit maintenant $x \geqslant -1$. On a

$$\begin{array}{rcll} (E) & \Leftrightarrow & x+2 \leqslant x+1+2\sqrt{x+1}+1 & \text{car } x+1 \geqslant 0 \text{ et } x+2 \geqslant 0 \\ & \Leftrightarrow & 0 \leqslant 2\sqrt{x+1} \text{ ce qui est toujours vrai.} & \end{array}$$

Conclusion l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = [-1\,;\,+\infty[\,.}$$

3.4 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $(E) : \sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-2} \geqslant 3$. L'équation est bien définie si et seulement si $x^2 \geqslant 1$ et $x^2 \geqslant 2$ i.e. si et seulement si $x^2 \geqslant 2$ ou encore si et seulement si $x \in \left]-\infty\,;\,-\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}\,;\,+\infty\right[$. Posons $U = \left]-\infty\,;\,-\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}\,;\,+\infty\right[$ et soit maintenant $x \in U$. On a

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2-1} \geqslant 3 - \sqrt{x^2-2}.$$

Premier cas, $3 - \sqrt{x^2-2} \leqslant 0$ alors (E) est vraie. Or pour $x \in U$,

$$\begin{array}{rcccll} 3-\sqrt{x^2-2} \leqslant 0 & \Leftrightarrow & 3 \leqslant \sqrt{x^2-2} & \Leftrightarrow & 9 \leqslant x^2-2 & \text{car } x^2-2 \geqslant 0 \\ & & & \Leftrightarrow & x^2 \geqslant 11. & \end{array}$$

Donc (E) est vraie sur $U_1 = \left]-\infty; -\sqrt{11}\right] \cup \left[\sqrt{11}; +\infty\right[$.
Second cas, $x \in U_2 = U \cap \left]-\sqrt{11}; \sqrt{11}\right[= \left]-\sqrt{11}; -\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2}; \sqrt{11}\right[$. Alors,

$$\begin{array}{rcll} (E) & \Leftrightarrow & \sqrt{x^2-1} \geqslant 3 - \sqrt{x^2-2} & \\ & \Leftrightarrow & x^2-1 \geqslant 9 - 6\sqrt{x^2-2} + x^2 - 2 & \text{car } x^2-1 \geqslant 0 \text{ et } 3-\sqrt{x^2-2} \geqslant 0 \\ & \Leftrightarrow & 6\sqrt{x^2-2} \geqslant 8 & \\ & \Leftrightarrow & \sqrt{x^2-2} \geqslant \dfrac{4}{3} & \\ & \Leftrightarrow & x^2-2 \geqslant \dfrac{16}{9} \qquad \text{car } x^2-2 \geqslant 0 & \\ & \Leftrightarrow & x^2 \geqslant \dfrac{34}{9} & \\ & \Leftrightarrow & x \leqslant -\dfrac{\sqrt{34}}{3} \qquad \text{OU} \qquad x \geqslant \dfrac{\sqrt{34}}{3}. & \end{array}$$

Or $2 < \frac{34}{9} < 11$ et donc $\sqrt{2} < \frac{\sqrt{34}}{3} < \sqrt{11}$. Donc dans ce cas, (E) est vraie sur $\left]-\sqrt{11}; -\frac{\sqrt{34}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{34}}{3}\,;\,\sqrt{11}\right[$.
En prenant l'union des deux ensembles trouvés, on conclut que l'ensemble solution est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\,-\frac{\sqrt{34}}{3}\right] \cup \left[-\frac{\sqrt{34}}{3}\,;\,+\infty\right[.}$$

3.5 Soient $x \in \mathbb{R}$ et (E) : $\sqrt{x^2+5x+3} < x+2$. Soit Δ le discriminant de x^2+5x+3. On a $\Delta = 25-12 = 13$. Donc les racines associées sont

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{13}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-5+\sqrt{13}}{2}.$$

Donc l'équation (E) est bien définie si et seulement si $x \leqslant x_1$ ou $x \geqslant x_2$. Soit maintenant $x \in \left]-\infty\,;\,x_1\right] \cup \left[x_2\,;\,+\infty\right[$. On note que $3 < \sqrt{13} < 4$, donc $-4 < x_1 < -\frac{9}{2} < -3$ et $-1 < x_2 < -\frac{1}{2}$.

Premier cas, si $x \leqslant x_1$, alors $x < -2$ et donc $x+2 < 0 \leqslant \sqrt{x^2+5x+3}$ donc (E) est impossible.

Second cas, si $x \geqslant x_2 > -2$. Alors,

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Leftrightarrow \quad x^2+5x+3 < (x+2)^2 \qquad && \text{car } x^2+5x+3 \geqslant 0 \text{ et } x+2 \geqslant 0\\
&\Leftrightarrow \quad x^2+5x+3 < x^2+4x+4 &&\\
&\Leftrightarrow \quad x < 1. &&
\end{aligned}$$

Or $x_2 < 0 < 1$ donc l'ensemble solution dans ce cas est $\left[x_2\,;\,1\right[$.

Conclusion, l'ensemble solution est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left[\frac{-5+\sqrt{13}}{2}\,;\,1\right[.}$$

4. **Savoir donner la borne supérieure/inférieure.**

4.1 Soit $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-2| \leqslant 1\}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad |x-2| \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant x-2 \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leqslant x \leqslant 3.$$

Par conséquent,

$$A = [1;3].$$

Donc 1 est LE minimum de A et donc également sa borne inférieure et 3 est le maximum de A et donc sa borne supérieure. Conclusion,

$$\boxed{\inf(A) = \min(A) = 1 \qquad \text{et} \qquad \sup(A) = \max(A) = 3.}$$

4.2 Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad x^4 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 > 1 (\text{ car } x^2 \geqslant 0) \quad \Leftrightarrow \quad x < -1 \quad \text{OU} \quad x > 1.$$

Par conséquent,

$$A = \left]-\infty\,;\,-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[.$$

L'ensemble A n'est donc ni majoré ni majoré et n'admet donc ni minimum ni maximum ni borne supérieure ni borne inférieure.

4.3 Soit $A = \left\{\sin\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in \mathbb{R}_+^*\right\}$. On sait que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin(y) \leqslant 1$. Notamment pour tout $x > 0$,

$$-1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1.$$

Ainsi, -1 est UN minorant de A et 1 est UN majorant de A. Or le minorant -1 est atteint : si $x = \frac{2}{3\pi} > 0$, alors

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1.$$

Donc -1 est LE minimum de A. De même pour $x = \frac{2}{\pi} > 0$, on a $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et donc 1 est LE maximum de A. Par suite, la borne inférieure de A est -1 et sa borne supérieure est 1. Conclusion,

$$\boxed{\inf(A) = \min(A) = -1 \qquad \text{et} \qquad \sup(A) = \max(A) = 1.}$$

4.4 Puisque A est non vide et minorée, A admet une borne inférieure. Donc pour tout $x \in A$, $\inf(A) \leqslant x$. Soit $y \in B$. Alors il existe $x \in A$ tel que $y = -x$. Donc $y \leqslant -\inf(A)$. Ainsi,

$$\forall y \in B, \qquad y \leqslant -\inf(A).$$

Donc B est majorée par $-\inf(A)$. Or A est non vide donc il existe $x \in A$. Donc $y = -x \in B$ et B est non vide. Ainsi B admet une borne supérieure qui est le plus petit des majorant. Or $-\inf(A)$ est un majorant de B. Conclusion,

$$\boxed{\sup(B) \leqslant -\inf(A).}$$

4.5 Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, $x \leqslant y$. Puisque B est non vide il existe $y \in B$. Donc par hypothèse, pour tout $x \in A$, $x \leqslant y$. Donc y est un majorant de A. Donc A est un ensemble majoré et non vide de $\mathbb{R}$ donc admet une borne supérieure. Comme y est un majorant de A et que la borne supérieure est le plus petit des majorants, on en déduit que

$$\sup(A) \leqslant y.$$

Le réel y étant un élément quelconque de B, on en déduit que pour tout $y \in B$, $\sup(A) \leqslant y$. Donc $\sup(A)$ est un minorant de B. Or B est non vide donc B admet une borne inférieure. $\inf(B)$ est le plus grand des minorants et $\sup(A)$ est un minorant de B. Conclusion,

$$\boxed{\sup(A) \leqslant \inf(B).}$$

5. **Résoudre une équation différentielle d'ordre 2.**

5.1 La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc (E) admet des solutions sur $\mathbb{R}$. Soit (E_c) l'équation caractéristique associée : $(E_c) : r^2 + 2r + 2 = 0$. Soit Δ le discriminant associé. $\Delta = 4 - 8 = -4$. Donc les racines sont complexes et conjuguées et données par

$$r_1 = \frac{-2-2i}{2} = -1-i \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{-2+2i}{2} = -1+i,$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E) est donné par

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x}\left(A\cos(x) + B\sin(x)\right) \end{array} \middle| (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Considérons l'équation

$$(F) \ : \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ z''(x) + 2z'(x) + 2z(x) = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{ix} = \mathrm{e}^{(-1+i)x}$$

On note que $-1+i$ est une racine simple de (E_c). Soit $a \in \mathbb{C}$. Posons $z : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & ax\,\mathrm{e}^{(-1+i)x} \end{array}$. La fonction z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$z'(x) = a\left(1 + (-1+i)\,x\right)\mathrm{e}^{(-1+i)x}$$

et

$$z''(x) = a\left(-1+i + (-1+i)\left(1 + (-1+i)\,x\right)\right)\mathrm{e}^{(-1+i)x} = a\left(-2+2i-2ix\right)\mathrm{e}^{(-1+i)x}.$$

Par conséquent,

$$\begin{array}{cl} & z \text{ est solution de } (F) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ a\left(-2+2i-2ix\right)\mathrm{e}^{(-1+i)x} + 2a\left(1+(-1+i)\,x\right)\mathrm{e}^{(-1+i)x} + 2a\,\mathrm{e}^{(-1+i)x} = \mathrm{e}^{(-1+i)x} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R},\ a\left(-2+2i-2ix+2+2\left(-1+i\right)x+2\right) = 1 \qquad \text{car } \mathrm{e}^{(-1+i)x} \neq 0 \\ \Leftrightarrow & 2ia = 1 \\ \Leftrightarrow & a = -\dfrac{i}{2}. \end{array}$$

Donc $z : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & -\frac{i}{2}x\,\mathrm{e}^{(-1+i)x} \end{array}$ est une solution de (F). Donc $y = \mathrm{Re}(z)$ est une solution de (E). Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = \mathrm{Re}\left(-\frac{i}{2}x\,\mathrm{e}^{(-1+i)x}\right) = \mathrm{Re}\left(-\frac{i}{2}x\,\mathrm{e}^{-x}\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)\right) = \frac{x\sin(x)\,\mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x\sin(x)\,\mathrm{e}^{-x}}{2} + \mathrm{e}^{-x}\left(A\cos(x) + B\sin(x)\right) \end{array} \middle| (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

5.2 La fonction $x \mapsto 3x-5+2x^2\,\mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc (E) admet des solutions sur $\mathbb{R}$. Soit (E_c) l'équation caractéristique associée : $(E_c) : r^2-4r+3=0$. Soit Δ le discriminant associé. $\Delta = 16-12=4$. Donc on a deux racines distinctes données par

$$r_1 = \frac{4-2}{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{4+2}{2} = 3,$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E) est donné par

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\,\mathrm{e}^{x} + B\,\mathrm{e}^{3x} \end{array} \,\middle|\, (A,B)\in\mathbb{R}^2 \right\}.$$

Considérons les équations

$$\begin{aligned} (E_1) : &\qquad \forall x\in\mathbb{R},\ y''(x) - 4y(x) + 3y(x) = 3x-5 \\ (E_2) : &\qquad \forall x\in\mathbb{R},\ y''(x) - 4y(x) + 3y(x) = 2x^2\,\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $y_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array}$. La fonction y_1 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} & y_1 \text{ est solution de } (E_1) \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x\in\mathbb{R},\ -4a + 3\,(ax+b) = 3x-5 \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x\in\mathbb{R},\ 3ax + 3b - 4a = 3x-5. \end{aligned}$$

On note alors qu'il suffit de prendre

$$\begin{cases} 3a = 3 \\ 3b-4a = -5 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{-5+4a}{3} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Donc $y_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x-\frac{1}{3} \end{array}$ est une solution de (E_1).

On note que -1 n'est pas une solution de l'équation caractéristique donc on pose $(a,b,c)\in\mathbb{R}^2$ et $y_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^{-x} \end{array}$. La fonction y_2 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= \left(2ax+b-ax^2-bx-c\right)\mathrm{e}^{-x} = \left(-ax^2+(2a-b)\,x+b-c\right)\mathrm{e}^{-x} \\ y_2''(x) &= \left(-2ax+2a-b+ax^2+(b-2a)\,x+c-b\right)\mathrm{e}^{-x} = \left(ax^2+(b-4a)\,x+2a+c-2b\right)\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} & y_2 \text{ est solution de } (E_2) \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x\in\mathbb{R},\ \left(ax^2+(b-4a)\,x+2a+c-2b\right)\mathrm{e}^{-x} \\ & \qquad\qquad -4\left(-ax^2+(2a-b)\,x+b-c\right)\mathrm{e}^{-x} + 3\left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^{-x} = 2x^2\,\mathrm{e}^{-x} \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x\in\mathbb{R},\ ax^2+(b-4a)\,x+2a+c-2b \\ & \qquad\qquad +4ax^2+(4b-8a)\,x+4c-4b+3ax^2+3bx+3c = 2x^2 \quad \text{car } \mathrm{e}^{-x}\neq 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \forall x\in\mathbb{R},\ 8ax^2+(8b-12a)\,x+2a-6b+8c = 2x^2. \end{aligned}$$

On note alors qu'il suffit de prendre

$$\begin{cases} 8a = 2 \\ 8b-12a = 0 \\ 2a-6b+8c = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{12a}{8} = \frac{3}{8} \\ c = \frac{6b-2a}{8} = \frac{\frac{9}{4}-\frac{2}{4}}{8} = \frac{7}{32} \end{cases}$$

Ainsi, $y_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{8x^2+12x+7}{32}\,\mathrm{e}^{-x} \end{array}$ est une solution de (E_2). Donc par le principe de superposition, y_1+y_2 est une solution de (E). Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x-\frac{1}{3}+\frac{8x^2+12x+7}{32}\,\mathrm{e}^{-x} + A\,\mathrm{e}^{x} + B\,\mathrm{e}^{3x} \end{array} \,\middle|\, (A,B)\in\mathbb{R}^2 \right\}.}$$

5.3 La fonction $x \mapsto 2x\,\mathrm{e}^{2x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc (E) admet des solutions sur $\mathbb{R}$. Soit (E_c) l'équation caractéristique associée : $(E_c) : r^2 - 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r-2)^2 = 0$. 2 étant une racine double, on en déduit l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E) :

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (Ax+B)\,\mathrm{e}^{2x} \end{array} \middle| \, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2\,(ax+b)\,\mathrm{e}^{2x} \end{array}$. La fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(3ax^2 + 2bx + 2ax^3 + 2bx^2\right)\mathrm{e}^{2x} = \left(2ax^3 + (3a+2b)\,x^2 + 2bx\right)\mathrm{e}^{2x} \\ y''(x) &= \left(6ax^2 + (6a+4b)\,x + 2b + 4ax^3 + (6a+4b)\,x^2 + 4bx\right)\mathrm{e}^{2x} \\ &= \left(4ax^3 + (12a+4b)\,x^2 + (6a+8b)\,x + 2b\right)\mathrm{e}^{2x}. \end{aligned}$$

Dès lors

$$\begin{aligned} & y \text{ est solution de } (E) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R},\ \left(4ax^3 + (12a+4b)\,x^2 + (6a+8b)\,x + 2b\right)\mathrm{e}^{2x} \\ & \qquad - 4\left(2ax^3 + (3a+2b)\,x^2 + 2bx\right)\mathrm{e}^{2x} + 4\left(ax^3 + bx^2\right)\mathrm{e}^{2x} = 2x\,\mathrm{e}^{2x} \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R},\ 4ax^3 + (12a+4b)\,x^2 + (6a+8b)\,x + 2b \\ & \qquad - 8ax^3 - (12a+8b)\,x^2 - 8bx + 4ax^3 + 4bx^2 = 2x \quad \text{car } \mathrm{e}^{2x} \neq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R},\ 6ax + 2b = 2x \end{aligned}$$

On note alors qu'il suffit de prendre $a = \frac{1}{3}$ et $b = 0$. Ainsi, $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^3}{3}\,\mathrm{e}^{2x} \end{array}$ est une solution de (E). Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^3}{3}\,\mathrm{e}^{2x} + (Ax+B)\,\mathrm{e}^{2x} \end{array} \middle| \, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

5.4 Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z(t) = \ln(y(t))$. Puisque y est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, z est bien définie et est même deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $y(t) = \mathrm{e}^{z(t)}$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y'(t) = z'(t)\,\mathrm{e}^{z(t)} \qquad \text{et} \qquad y''(t) = z''(t)\,\mathrm{e}^{z(t)} + (z'(t))^2\,\mathrm{e}^{z(t)}.$$

Alors, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & y \text{ est solution de } (E) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{R},\ y''(t)y(t) - (y'(t))^2 + 2y(t)y'(t) + 2y^2(t)\ln(y(t)) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{R},\ \left(z''(t)\,\mathrm{e}^{z(t)} + (z'(t))^2\,\mathrm{e}^{z(t)}\right)\mathrm{e}^{z(t)} - \left(z'(t)\,\mathrm{e}^{z(t)}\right)^2 + 2\,\mathrm{e}^{z(t)}\,z'(t)\,\mathrm{e}^{z(t)} + 2\left(\mathrm{e}^{z(t)}\right)^2\ln\left(\mathrm{e}^{z(t)}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{R},\ z''(t)\,\mathrm{e}^{2z(t)} + (z'(t))^2\,\mathrm{e}^{2z(t)} - (z'(t))^2\,\mathrm{e}^{2z(t)} + 2z'(t)\,\mathrm{e}^{2z(t)} + 2\,\mathrm{e}^{2z(t)}\,z(t) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R},\ z''(t) + 2z'(t) + 2z(t) = 0 \qquad \text{car } \mathrm{e}^{2z(t)} \neq 0. \end{aligned}$$

Alors, d'après la question 5.1, on obtient que

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E) \quad & \Leftrightarrow \quad \exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ z(t) = \mathrm{e}^{-t}\,(A\cos(t) + B\sin(t)) \\ & \Leftrightarrow \quad \exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ y(t) = \mathrm{e}^{z(t)} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-t}(A\cos(t)+B\sin(t))}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ t & \mapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-t}(A\cos(t)+B\sin(t))} \end{array} \middle| \, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

5.5 Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]-1;1[$. Posons pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $z(t) = y(\sin(t))$ i.e. pour tout $x \in]-1;1[$, $y(x) = z(\arcsin(x))$. La fonction y est bien définie et même deux fois dérivable sur $]-1;1[$ et la fonction sin est deux fois dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et vérifie $\sin\left(\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right) =]-1;1[$. Donc la fonction z est bien définie et même deux fois dérivable sur $]-1;1[$. De plus, pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arcsin(x)) \\ y''(x) &= \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{-2x}{(1-x^2)^{3/2}} z'(\arcsin(x)) + \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 z''(\arcsin(x)) \\ &= \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} z'(\arcsin(x)) + \frac{1}{1-x^2} z''(\arcsin(x)). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & y \text{ est solution de } (E) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in]-1;1[,\ (1-x^2)\, y''(x) - \left(4\sqrt{1-x^2} - x\right) y'(x) + 3y(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in]-1;1[,\ (1-x^2)\left(\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} z'(\arcsin(x)) + \frac{1}{1-x^2} z''(\arcsin(x))\right) \\ & \qquad - \left(4\sqrt{1-x^2} + x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arcsin(x))\right) + 3z(\arcsin(x)) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in]-1;1[,\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arcsin(x)) + z''(\arcsin(x)) \\ & \qquad - 4z'(\arcsin(x)) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} z'(\arcsin(x)) + 3z(\arcsin(x)) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in]-1;1[,\ z''(\arcsin(x)) - 4z'(\arcsin(x)) + 3z(\arcsin(x)) = 0. \end{aligned}$$

Posons pour tout $x \in]-1;1[$, $t = \arcsin(x)$ alors $t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et

$$y \text{ est solution de } (E) \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[,\ z''(t) - 4z'(t) + 3z(t) = 0.$$

Donc par la question 5.2, on obtient

$$\begin{aligned} & y \text{ est solution de } (E) \\ \Leftrightarrow \quad & \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[,\ z(t) = A\,\mathrm{e}^{t} + B\,\mathrm{e}^{3t} \\ \Leftrightarrow \quad & \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in]-1;1[,\ y(x) = z(\arcsin(x)) = A\,\mathrm{e}^{\arcsin(x)} + B\,\mathrm{e}^{3\arcsin(x)}. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) sur $]-1;1[$ est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{rcl}]-1;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\,\mathrm{e}^{\arcsin(x)} + B\,\mathrm{e}^{3\arcsin(x)} \end{array} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$

5.6 Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $z(t) = y\left(t^2\right)$ i.e. $y(x) = z(\sqrt{x})$. Puisque y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction z est aussi bien définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} z'\left(\sqrt{x}\right) \\ y''(x) &= -\frac{1}{4x^{3/2}} z'\left(\sqrt{x}\right) + \frac{1}{4x} z''\left(\sqrt{x}\right). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} & y \text{ est solution de } (E) \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 4xy''(x) + \left(2 - 8\sqrt{x}\right) y'(x) + 4y(x) = 2\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{2\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 4x\left(-\frac{1}{4x^{3/2}} z'\left(\sqrt{x}\right) + \frac{1}{4x} z''\left(\sqrt{x}\right)\right) + \left(2 - 8\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} z'\left(\sqrt{x}\right)\right) + 4z\left(\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{2\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ -\frac{1}{\sqrt{x}} z'\left(\sqrt{x}\right) + z''\left(\sqrt{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x}} z'\left(\sqrt{x}\right) - 4z'\left(\sqrt{x}\right) + 4z\left(\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{2\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow \quad & \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ z''\left(\sqrt{x}\right) - 4z'\left(\sqrt{x}\right) + 4z\left(\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t = \sqrt{x}$. Alors,

$$y \text{ est solution de } (E) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ z''(t) - 4z'(t) + 4z(t) = 2t\,\mathrm{e}^{2t}\,.$$

Donc par la question 5.3

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow \exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ z(t) = \frac{t^3}{3}\,\mathrm{e}^{2t} + (At+B)\,\mathrm{e}^{2t} \\ &\Leftrightarrow \exists\,(A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x) = z\left(\sqrt{x}\right) = \frac{x^{3/2}}{3}\,\mathrm{e}^{2\sqrt{x}} + \left(A\sqrt{x}+B\right)\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}\,. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^{3/2}}{3}\,\mathrm{e}^{2\sqrt{x}} + (A\sqrt{x}+B)\,\mathrm{e}^{2\sqrt{x}} \end{array} \;\middle|\; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$