Correction de l'interrogation 13.5 d'entrainement
Systèmes linéaires
Négligeabilité - Equivalents

1. **Savoir appliquer l'algorithme de Gauss-Jordan sur un système.**

1.1 Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$(\mathcal{S}) \left\{\begin{array}{rrrcr} 2x & -y & +3z & = & 1 \\ -4x & +2y & +z & = & 3 \\ -2x & +y & +4z & = & 4 \\ 10x & -5y & -6z & = & -10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcrl} 2x & -y & +3z & = & 1 & \\ & & 7z & = & 5 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ & & 7z & = & 5 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ & & -21z & = & -15 & L_4 \leftarrow L_4 - 5L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1+y-3z}{2} = \frac{1-3\frac{5}{7}}{2} + \frac{y}{2} = -\frac{8}{14} + \frac{y}{2} = -\frac{4}{7} + \frac{y}{2} \\ z = \frac{5}{7}, \end{array}\right.$$

Conclusion l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \left(-\frac{4}{7} + \frac{y}{2},\ y,\ \frac{5}{7}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\} = \left(-\frac{4}{7},\ 0,\ \frac{5}{7}\right) + \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)\right).}$$

1.2 Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$(\mathcal{S}) \left\{\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & -4z & = & 8 \\ 3x & +3y & -5z & = & 14 \\ 4x & +5y & -2z & = & 16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcrl} 2x & +y & -4z & = & 8 & \\ & 3y & +2z & = & 4 & L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ & 3y & +6z & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcrl} 2x & +y & -4z & = & 8 & \\ & 3y & +2z & = & 4 & \\ & & 4z & = & -4 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4 - \frac{y}{2} + 2z = 4 - 1 - 2 = 1 \\ y = \frac{4-2z}{3} = \frac{4+2}{3} = 2 \\ z = -1. \end{array}\right.$$

Conclusion l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est :

$$\boxed{\mathscr{S} = \{(1,\ 2,\ -1)\}.}$$

1.3 Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$(\mathcal{S}) \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +2y & +3z & = & 1 \\ 2x & +3y & -z & = & 0 \\ 3x & +y & +2z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +2y & +3z & = & 1 & \\ & -y & -7z & = & -2 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & -5y & -7z & = & -3 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcrl} x & +2y & +3z & = & 1 & \\ & -y & -7z & = & -2 & \\ & & 28z & = & 7 & L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - 2y - 3z = \frac{4-2-3}{4} = -\frac{1}{4} \\ y = 2 - 7z = \frac{8-7}{4} = \frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{4}. \end{array}\right.$$

Conclusion l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)\right\}.}$$

1.4 Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$(\mathcal{S}) \left\{\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & +z & = & 3 \\ 3x & -y & -2z & = & 0 \\ x & +y & -z & = & -2 \\ x & +2y & +z & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & -2 \\ 3x & -y & -2z & = & 0 \\ 2x & +y & +z & = & 3 \\ x & +2y & +z & = & 1 \end{array}\right. \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & -2 \\ & -4y & +z & = & 6 \\ & -y & +3z & = & 7 \\ & +y & +2z & = & 3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & -2 \\ & y & +2z & = & 3 \\ & -y & +3z & = & 7 \\ & -4y & +z & = & 6 \end{array}\right. \quad L_2 \leftrightarrow L_4$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & -2 \\ & y & +2z & = & 3 \\ & & +5z & = & 10 \\ & & +9z & = & 18 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 4L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & -2 \\ & y & +2z & = & 3 \\ & -y & +3z & = & 7 \\ & -4y & +z & = & 6 \end{array}\right. \quad L_2 \leftrightarrow L_4$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & -2 \\ & y & +2z & = & 3 \\ & & +5z & = & 10 \\ & & +9z & = & 18 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 4L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & -2 \\ & y & +2z & = & 3 \\ & & 5z & = & 10 \end{array}\right. \quad \text{car } L_3 = \tfrac{9}{5}L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - y + z = -2 + 1 + 2 = 1 \\ y = 3 - 2z = 3 - 4 = -1 \\ z = 2. \end{cases}$$

Conclusion l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est :

$$\boxed{\mathscr{S} = \{(1,\ -1,\ 2)\}\,.}$$

1.5 *Héhéhé... Gloups ! Vous voulez vraiment une solution ? Allez, c'est parti !* Soient $(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^6$. On a les équivalences suivantes :

$$(\mathcal{S}_{10}) \quad \left\{\begin{array}{rrrrrcr} 3x & +6y & +5z & +6t & +4u & = & 14 \\ 5x & +9y & +7z & +8t & +6u & = & 18 \\ 6x & +12y & +13z & +9t & +7u & = & 32 \\ 4x & +6y & +6z & +5t & +4u & = & 16 \\ 2x & +5y & +4z & +5t & +3u & = & 11 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrcr} x & +y & +z & +t & +u & = & 3 \\ 5x & +9y & +7z & +8t & +6u & = & 18 \\ 6x & +12y & +13z & +9t & +7u & = & 32 \\ 4x & +6y & +6z & +5t & +4u & = & 16 \\ 2x & +5y & +4z & +5t & +3u & = & 11 \end{array}\right. \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_5$$

$$(\mathcal{S}_{10}) \iff \left\{\begin{array}{cccccccl} x & +y & +z & +t & +u & = & 3 & \\ & +4y & +2z & +3t & +u & = & 3 & L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ & +6y & +7z & +3t & +u & = & 14 & L_3 \leftarrow L_3 - 6L_1 \\ & +2y & +2z & +t & & = & 4 & L_4 \leftarrow L_1 - 4L_1 \\ & +3y & +2z & +3t & +u & = & 5 & L_5 \leftarrow L_5 - 2L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccccccl} x & +y & +z & +t & +u & = & 3 & \\ & y & & & & = & -2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_5 \\ & 6y & +7z & +3t & +u & = & 14 & \\ & 2y & +2z & +t & & = & 4 & \\ & 3y & +2z & +3t & +u & = & 5 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccccccc} x & +z & +t & +u & = & 3-y & =3+2 & =5 \\ & & & y & = & -2 & & \\ & 7z & +3t & +u & = & 14-6y & =14+12 & =26 \\ & 2z & +t & & = & 4-2y & =4+4 & =8 \\ & 2z & +3t & +u & = & 5-3y & =5+6 & =11 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccl} x & +z & +t & +u & = & 5 & \\ & & & y & = & -2 & \\ & z & & +u & = & 2 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_4 \\ & 2z & +t & & = & 8 & \\ & 2z & +3t & +u & = & 11 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccl} x & +z & +t & +u & = & 5 & \\ & & & y & = & -2 & \\ & z & & +u & = & 2 & \\ & & +t & -2u & = & 4 & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \\ & & +3t & -u & = & 7 & L_5 \leftarrow L_5 - 2L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccl} x & +z & +t & +u & = & 5 & \\ & & & y & = & -2 & \\ & z & & +u & = & 2 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_4 \\ & 2z & +t & & = & 8 & \\ & 2z & +3t & +u & = & 11 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccl} x & +z & +t & +u & = & 5 & \\ & & & y & = & -2 & \\ & z & & +u & = & 2 & \\ & & t & -2u & = & 4 & \\ & & & 5u & = & -5 & L_5 \leftarrow L_5 - 3L_4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & = & 5-z-t-u & = & 5-3-2+1 & = & 1 \\ y & = & -2 & & & & \\ z & = & 2-u & = & 2+1 & = & 3 \\ t & = & 4+2u & = & 4-2 & = & 2 \\ u & = & -1 & & & & \end{array}\right.$$

Conclusion le système (S_{10}) admet une unique solution. Son ensemble solution est un singleton :

$$\boxed{\mathscr{S} = \{(1,\, -2,\, 3,\, 2,\, -1)\}\,.}$$

2. **Savoir appliquer l'algorithme de Gauss-Jordan sur une matrice.**

 4.1 On a les calculs suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

Conclusion,

$$\boxed{A \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

4.2 On a les calculs suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4 + L_3$$

Conclusion,

$$\boxed{A \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

4.3 On a les calculs suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 15 & 5 & 15 \\ 0 & 9 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{5} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3} L_3 \\ L_4 \leftarrow -L_4 \end{array}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 7 & 2 & 5 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

Conclusion,

$$\boxed{A \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

4.4 On a les calculs suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -8 & -1 \\ 0 & 11 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & -8 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow \frac{1}{11} L_2$$

$$\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 8L_2$$

Conclusion,

$$\boxed{A \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

4.5 On a les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -7 & -7 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} &\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -7 & -7 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} && L_1 \leftrightarrow L_4 \\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} && L_1 \leftarrow \tfrac{1}{2} L_4 \\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -14 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 + 7L_1 \\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & -14 & 2 \end{pmatrix} && L_2 \leftrightarrow L_4 \\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -26 \end{pmatrix} && \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 14L_2 \end{array} \\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && L_4 \leftarrow L_4 + 13L_3
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{A \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

4.6 On a les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} && L_1 \leftrightarrow L_3 \\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -8 & -4 \end{pmatrix} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{A \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.}$$

3. **Simplifier un petit o.**
Pour aider à la compréhension du résultat, je vous ajoute des explications en rouge.

2.1 $\underbrace{o\left(x^5+x^2\right)}_{=o(x^5)}+\underbrace{xo\left(3\right)}_{=o(x)}+\underbrace{\left(o\left(x^2\right)\right)^3}_{=o(x^2)o(x^2)o(x^2)=o(x^6)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^6\right)$

2.2 $o(7\sqrt{x}+\underbrace{\sin(x)}_{\sim x=o\left(\sqrt{x}\right)}-\underbrace{x^2\ln(x)}_{=o\left(\sqrt{x}\right)}) \underset{x\to0}{=} o\left(\sqrt{x}\right)$

2.3 $\underbrace{\dfrac{1}{x^5}}_{=o\left(\frac{1}{x^2}\right)}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)+\underbrace{\sin(x)o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)}_{=o\left(\frac{1}{x^3}\right)=o\left(\frac{1}{x^2}\right)}+\underbrace{o\left(\dfrac{1}{x^4\ln(x)}\right)}_{=o\left(\frac{1}{x^2}\right)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

2.4 $o\left(x^x\right)+\underbrace{2^x o\left(3^x\right)}_{=o(6^x)=o(x^x)}-\underbrace{10^{10}o\left(\dfrac{x^3}{\ln(x)}\right)}_{=o(x^3)=o(x^x)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^x\right)$

2.5 $\underbrace{9x}_{=o(x^3)}+o\left(x^3\right)+\underbrace{2019\sqrt{x}}_{=o(x^3)}+\underbrace{o\left(\ln^5(x)\right)}_{=o(x^3)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^3\right)$

2.6 $o(\underbrace{\underbrace{\arcsin\left(x^2\right)}_{\to\frac{\pi}{2}}+\underbrace{3\ln(x)}_{=o(1)}+\underbrace{o\left(1\right)x}_{=o(x)=o(1)}}_{\sim\frac{\pi}{2}}) \underset{x\to1}{=} o\left(1\right)$

2.7 $o(\underbrace{\underbrace{\ln\left(1+\underbrace{o\left(x\right)}_{=u\to0}\right)}_{=u+o(u)=o(x)+o(o(x))=o(x)}+x^2}_{=o(x)})+\underbrace{o(\underbrace{\left(\left|\sin\left(x\right)\right|\right)^{3/2}}_{\sim|x|^{3/2}})}_{=o(x)} \underset{x\to0}{=} o\left(x\right)$

2.8 $\underbrace{o\left(1\right)o\left(x^3\right)}_{o(x^3)}+\underbrace{o\left(x^{1/3}\right)o\left(\sqrt{x}\right)}_{=o\left(x^{5/6}\right)}+\underbrace{o\left(x\ln(x)\right)}_{=o\left(x^{5/6}\right)} \underset{x\to0}{=} o\left(x^{5/6}\right)$

2.9 $\underbrace{o(\underbrace{\arcsin(\underbrace{x-\dfrac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)}_{=u=x+o(x)})}_{=u+o(u)=x+o(x)+o(x+o(x))=x+o(x)})}_{=o(x)}\underbrace{o(\underbrace{\cos(x)}_{\sim1})}_{=o(1)} \underset{x\to0}{=} o\left(x\right)$

2.10 $o\left(\sum_{k=1}^n x^k\ln^{n-k}(x)\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^n\right)$

2.11 $o(\underbrace{\exp(\underbrace{o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)+\underbrace{\left(o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^2}_{=o\left(\frac{1}{x^2}\right)}o\left(\ln^3(x)\right)}_{=o\left(\frac{\ln^3(x)}{x^2}\right)\to0})}_{\to e^0=1}) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(1\right)$

Détails : On a

$$\left(o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 o\left(\ln^3(x)\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)o\left(\frac{1}{x}\right)o\left(\ln^3(x)\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln^3(x)}{x^2}\right).$$

Or $\frac{1}{x^4} \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{\ln^3(x)}{x^2}$. Donc

$$o\left(\frac{1}{x^4}\right)+\left(o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 o\left(\ln^3(x)\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^4}\right)+o\left(\frac{\ln^3(x)}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln^3(x)}{x^2}\right).$$

Par croissance comparée, on sait que $\frac{\ln^3(x)}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ i.e. $\frac{\ln^3(x)}{x^2} \underset{x\to+\infty}{=} o(1)$ *(attention la lecture de droite à gauche est fausse)*. Donc

$$o\left(\frac{\ln^3(x)}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o(1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Notez qu'ici on perd de l'information, mais en prenant un terme prépondérant plus grossier ($\frac{\ln^3(x)}{x^2}$ est une vitesse plus rapide que 1) mais il est ici inutile de garder plus d'information car en composant par l'exponentiel il est juste nécessaire de savoir que le terme tend vers 0.

Or $e^u \underset{u\to0}{=} 1 + o(1)$. Donc en posant $u = o\left(\frac{\ln^3(x)}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, on a

$$\exp\left(o\left(\frac{1}{x^4}\right) + \left(o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 o\left(\ln^3(x)\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} \exp\left(o\left(\frac{\ln^3(x)}{x^2}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} e^u \underset{x\to+\infty}{=} 1 + o(1).$$

Autrement dit,

$$\exp\left(o\left(\frac{1}{x^4}\right) + \left(o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 o\left(\ln^3(x)\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$$

ou encore (puisque $1 \in \mathbb{R}^*$)

$$\exp\left(o\left(\frac{1}{x^4}\right) + \left(o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 o\left(\ln^3(x)\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{o\left(\exp\left(o\left(\frac{1}{x^4}\right) + \left(o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 o\left(\ln^3(x)\right)\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} o(1).}$$

2.12 $o\Bigg(\underbrace{\frac{1}{x\ln^3(x)} + \frac{1}{x}o\left(\frac{1}{\ln(x^3)}\right)}_{=o\left(\frac{1}{x\ln(x)}\right)}\Bigg) + \underbrace{\left(o\left(\frac{1}{x}\right)\right)^3 \ln(x)}_{=o\left(\frac{\ln(x)}{x^3}\right)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x\ln(x)}\right)$

2.13 $o[\underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)n}_{\sim\frac{1}{n^2}n=\frac{1}{n}} + o(\underbrace{\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{\sim\frac{1}{\sqrt{n}}})o(\underbrace{\sqrt[3]{\frac{1}{n^6+2}}}_{\sim\left(\frac{1}{n^6}\right)^{1/3}=\frac{1}{n^2}})] \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

2.14 $o(\underbrace{3\sin^2(x)}_{\sim 3x^2}) + \underbrace{\cos(x)}_{\sim 1}o(x^3) + o(\underbrace{\ln(x+1)}_{\sim x}) + o(\underbrace{\ln(1-x)}_{\sim -x}) \underset{x\to0}{=} o(x)$

2.15 $o(\underbrace{\left(e^{5n}\right)^2}_{=e^{10n}=o\left(\frac{n!}{n^3}\right)} + \frac{n!}{n^3} + \underbrace{n^2\ln^5(n)}_{=o\left(\frac{n!}{n^3}\right)}) + \underbrace{o(\mathrm{sh}(n))\,o(\mathrm{ch}(n))}_{=o(e^{2n})=o\left(\frac{n!}{n^3}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{n!}{n^3}\right)$

2.16 $\underbrace{o(\underbrace{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\sim\frac{1}{n^2}})}_{=o\left(\frac{1}{n^2}\right)} - \underbrace{\sin^2\left(o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}_{\sim\left(o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2=o\left(\frac{1}{n^2}\right)} + \underbrace{\sin\left(\left(o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2\right)}_{=\sin\left(o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\sim o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

2.17 $o(\ln(x))\,o(\underbrace{\frac{1}{\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}}_{\sim\frac{1}{\frac{1}{x}}=x}) - \underbrace{5o(x^2)\,o\left(\frac{1}{\ln^3(x)}\right)}_{=o\left(\frac{x^2}{\ln^3(x)}\right)} + \underbrace{(o(\underbrace{\arctan(\sqrt{x})}_{\to\frac{\pi}{2}}))^4}_{=o(1)} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{x^2}{\ln^3(x)}\right)$

2.18 $o(\underbrace{\sqrt{n!+3^n+n^n}}_{\sim n^{n/2}})o(\underbrace{\underbrace{\arcsin\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\sim\frac{1}{n^2}=o(-\ln(n))} + \ln\left(\frac{1}{n}\right)}_{=o(\ln(n))}) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^{n/2}\right)$

2.19 $o(o[\underbrace{o\left(\ln^3(x)\right)x^2}_{=o(x^2\ln^3(x))} + \underbrace{\tan(3x^2)}_{\sim 3x^2} + \underbrace{o(x)\,o(\sqrt{x})}_{=o(x^{3/2})}]) \underset{x\to0}{=} o\left(x^{3/2}\right)$

2.20 $o\left((x-2)^2\right) \underbrace{\sqrt{o\left(\operatorname{sh}(x-2)\right)}}_{=\sqrt{o(x-2)}=o\left(\sqrt{x-2}\right)} + \underbrace{\sqrt{x-2}\underbrace{e^{x-2}}_{\sim 1}o(4)}_{=o\left(\sqrt{x-2}\right)} \underset{x\to 2}{=} o\left(\sqrt{x-2}\right)$

4. **Déterminer un équivalent.** Attention à ne pas faire, des compositions d'équivalents ni des sommes d'équivalents ! Même si les calculs parfois y ressemblent ce n'est jamais le cas.

2.1 $\frac{\cos(x)-\sqrt{1+x^2}}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -1$.

Explication : On a

$$\frac{\cos(x)-\sqrt{1+x^2}}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)-\left(1+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{-x^2+o\left(x^2\right)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2}{x^2} = -1.$$

2.2 $\frac{x^3\arctan(x)-x^4}{\cos(x^2)-1} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2x^2}{3}$

Explication : On a

$$\frac{x^3\arctan(x)-x^4}{\cos\left(x^2\right)-1} \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3\left(x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)-x^4}{1-\frac{x^4}{2}+o\left(x^4\right)-1} \underset{x\to 0}{=} \frac{-\frac{x^6}{3}+o\left(x^6\right)}{-\frac{x^4}{2}+o\left(x^4\right)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^6}{3}}{-\frac{x^4}{2}} = \frac{2x^2}{3}.$$

2.3 $\frac{\sin(x)-\ln(1+x)}{x\tan(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}$

Explication : On a

$$\frac{\sin(x)-\ln(1+x)}{x\tan(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{x+o\left(x^2\right)-\left(x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)}{x\tan(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}{x\tan(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

2.4 $5^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(5)$

Explication : En posant $u(x)=x\ln(5) \underset{x\to 0}{\to} 0$, on a

$$5^x-1 = \mathrm{e}^{x\ln(5)}-1 \underset{x\to 0}{=} 1+u(x)+o\left(u(x)\right)-1 \underset{x\to 0}{=} x\ln(5)+o\left(x\ln(5)\right) \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(5).$$

2.5 $\frac{\arctan(x)-\sin(x)}{\mathrm{sh}(x)} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{6}$

Explication : On a

$$\frac{\arctan(x)-\sin(x)}{\mathrm{sh}(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)}{\mathrm{sh}(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)}{\mathrm{sh}(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x} = -\frac{x^2}{6}.$$

2.6 $\mathrm{e}^{\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \mathrm{e}$

Explication : On sait que $\cos(x) \underset{x\to 0}{\to} 1$. Donc $\mathrm{e}^{\cos(x)} \underset{x\to 0}{\to} \mathrm{e}^1 \neq 0$ i.e. $\mathrm{e}^{\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \mathrm{e}$.

Attention à ne pas dire $\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1 \Rightarrow \mathrm{e}^{\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \mathrm{e}$. *On peut composer les limites mais pas les équivalents.*

2.7 $(\sin(x)+x)^3 \underset{x\to 0}{\sim} 8x^3$

Explication : On a $\sin(x)+x \underset{x\to 0}{=} x+o(x)+x \underset{x\to 0}{=} 2x+o(x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$. Donc par élévation à la puissance, $(\sin(x)+x)^3 \underset{x\to 0}{\sim} 8x^3$.

2.8 $\arcsin(x)\sqrt{1+x}-\mathrm{e}^x\ln\left(1+x^2\right) \underset{x\to 0}{\sim} x$

Explication : On a $\arcsin(x)\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} x\times 1 = x$ et $-\mathrm{e}^x\ln\left(1+x^2\right) \underset{x\to 0}{\sim} -1\times x^2 = -x^2$. On constate donc que $-\mathrm{e}^x\ln\left(1+x^2\right) \underset{x\to 0}{\ll} \arcsin(x)\sqrt{1+x}$. Ainsi, $\arcsin(x)\sqrt{1+x}-\mathrm{e}^x\ln\left(1+x^2\right) \underset{x\to 0}{\sim} \arcsin(x)\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Attention à ne pas dire « $\arcsin(x)\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} = x$ et $-\mathrm{e}^x\ln\left(1+x^2\right) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2$ implique $\arcsin(x)\sqrt{1+x}-\mathrm{e}^x\ln\left(1+x^2\right) \underset{x\to 0}{\sim} x-x^2$ », ce qui serait faire une somme d'équivalents !

2.9 $\frac{\sqrt{1+2x}-\cos(x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 1$
Explication : On a
$$\frac{\sqrt{1+2x}-\cos(x)}{x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1+\frac{2x}{2}+o(x)-(1+o(x))}{x} \underset{x\to 0}{=} \frac{x+o(x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1.$$

2.10 $\mathrm{ch}(x)-(1+3x)^5 \underset{x\to 0}{\sim} -15x$
Explication : On a
$$\mathrm{ch}(x)-(1+3x)^5 \underset{x\to 0}{=} 1+o(x)-(1+5\times 3x+o(x)) \underset{x\to 0}{=} -15x+o(x) \underset{x\to 0}{\sim} -15x.$$

2.11 $\mathrm{sh}\left(\mathrm{e}^{3x}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \mathrm{sh}(1)$
Explication : Puisque $\mathrm{e}^{3x} \underset{x\to 0}{\to} 1$, on en déduit que $\mathrm{sh}\left(\mathrm{e}^{3x}\right) \underset{x\to 0}{\to} \mathrm{sh}(1)$ car sh est continue en 1. Or $\mathrm{sh}(1)\neq 0$. Donc $\mathrm{sh}\left(\mathrm{e}^{3x}\right) \underset{x\to 0}{\to} \mathrm{sh}(1) \Leftrightarrow \mathrm{sh}\left(\mathrm{e}^{3x}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \mathrm{sh}(1)$.
Encore une fois, on fait une composition de limites et non d'équivalents.

2.12 $\arctan(\mathrm{sh}(x)) \underset{x\to 0}{\sim} x$
Explication : Posons $u(x)=\mathrm{sh}(x)$. On a $u(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$ et $\arctan(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$. Donc on a
$$\arctan(\mathrm{sh}(x)) \underset{x\to 0}{=} \arctan(u(x)) \underset{x\to 0}{\sim} u(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$
Attention ! Notez bien le sens du raisonnement. Nous avons fait un changement de variable et non une composition. Il serait absolument FAUX d'affirmer $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \Rightarrow \arctan(\mathrm{sh}(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, *même si la conclusion est la même !*

2.13 $\arctan(\mathrm{ch}(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{4}$
Explication : On a $\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{\to} 1$. Donc $\arctan(\mathrm{ch}(x)) \underset{x\to 0}{\to} \arctan(1)=\frac{\pi}{4}\neq 0$ i.e. $\arctan(\mathrm{ch}(x)) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{4}$.
Attention c'est une composition de limites et non d'équivalents.

2.14 $\frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{4}{9}$.
Explication : En posant $u(x)=-2x^2+o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{\to} 0$ et $v(x)=-\frac{9x^2}{2}+o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{\to} 0$, on a
$$\begin{aligned}\frac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))} &\underset{x\to 0}{=} \frac{\ln\left(1-\frac{4x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)}{\ln\left(1-\frac{9x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)}\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{\ln(1+u(x))}{\ln(1+v(x))}\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{u(x)+o(u(x))}{v(x)+o(v(x))}\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{-2x^2+o\left(x^2\right)+o\left(x^2\right)}{-\frac{9x^2}{2}+o\left(x^2\right)+o\left(x^2\right)}\\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{-2x^2}{-\frac{9x^2}{2}}\\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{4}{9}.\end{aligned}$$

2.15 $(\ln(1+x)-x)^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^4}{4}$.
Explication : On a
$$\ln(1+x)-x \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)-x \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}.$$

Donc par élévation au carré : $(\ln(1+x)-x)^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^4}{4}$.

2.16 $\frac{\mathrm{ch}(x)-\cos(x)}{1+x\arctan(x^2)-\sqrt{1+x^3}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x}$.

Explication : On a

$$\frac{\mathrm{ch}(x)-\cos(x)}{1+x\arctan(x^2)-\sqrt{1+x^3}} \underset{x\to 0}{=} \frac{1+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)}{1+x\left(x^2+o\left(x^2\right)\right)-\left(1+\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right)\right)} \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2+o\left(x^2\right)}{\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{\frac{x^3}{2}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x}.$$

2.17 $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{\sqrt{2}}$

Explication : On a

$$1-\sqrt{1-x^2} \underset{x\to 0}{=} 1-\left(1-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

Donc par passage à la puissante 1/2, $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{\sqrt{2}}$.

2.18 $\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$

Explication : On a

$$\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)-1-x}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x} = \frac{x}{2}.$$

2.19 $\ln\left(1+x^2\right)-\arctan\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^4}{2}$

Explication : On a

$$\ln\left(1+x^2\right)-\arctan\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} x^2-\frac{x^4}{2}+o\left(x^4\right)-\left(x^2-\frac{x^6}{3}+o\left(x^6\right)\right) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^4}{2}+o\left(x^4\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^4}{2}.$$

2.20 $\ln(1+\sin(x)) \underset{x\to 0}{\sim}$

Explication : On pose $u(x)=x+o(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$. Alors

$$\ln(1+\sin(x)) \underset{x\to 0}{=} \ln(1+x+o(x)) \underset{x\to 0}{=} \ln(1+u(x)) \underset{x\to 0}{=} u(x)+o(u(x)) \underset{x\to 0}{=} x+o(x)+o(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Attention à nouveau à ne pas faire de composition c'est-à-dire à écrire ici que

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \textit{ implique } \ln(1+\sin(x)) \underset{x\to 0}{\sim} x,$$

ce qui est un raisonnement faux.