

Interrogation 13 d'entraînement

Matrices

1. Restituer le cours.

- 1.1 Énoncer la propriété donnant la transposée du produit.
- 1.2 Définir une matrice symétrique/antisymétrique.
- 1.3 Énoncer les opérations élémentaires.
- 1.4 À l'aide des opérations élémentaires donner la caractérisation de l'inversibilité d'une matrice.
- 1.5 Énoncer la proposition reliant l'équivalence et la négligeabilité entre deux fonctions (Prop II.3).
- 1.6 Si deux fonctions sont équivalentes, que dire de leur comportement asymptotique? (Prop II.4)
- 1.7 Enumérer les opérations qu'il est possible de faire sur les équivalents et celles que l'on sait fausses en général.

Révisions

- 1.8 Énoncer la proposition retournant les racines carrées d'un complexe.
- 1.9 Donner les racines d'un trinôme. On veillera à bien définir toutes les quantités.
- 1.10 Énoncer la proposition reliant les coefficients d'un trinôme à ses racines.
- 1.11 Définir l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité. Que dire du produit de deux racines n -ième de l'unité? de l'inverse d'une racine n -ième de l'unité? de son conjugué?
- 1.12 Caractériser l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.
- 1.13 Définir j . Que vaut j^2 ? j^3 ? $1 + j + j^2$?
- 1.14 Caractériser les racines n -ièmes de l'unité par une somme.
- 1.15 Énoncer la propriété donnant les racines n -ièmes d'un complexe quelconque.

2. Savoir utiliser la formule du produit matriciel.

- 2.1 Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, le coefficient c_{ij} de la matrice AB .
- 2.2 Soient $A = (3i + 2j)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = (ie^j)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, le coefficient c_{ij} de la matrice AB .
- 2.3 Soit $A = (i + j)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, le coefficient c_{ij} de la matrice A^2 .
- 2.4 Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C = (c_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ sous forme d'une seule somme double, le coefficient d_{ij} de la matrice ABC .
- 2.5 Soient $A = (2^{i+j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = (3^{i-j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, le coefficient c_{ij} de la matrice AB .

3. Savoir calculer les puissances d'une matrice.

- 3.1 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$. Calculer pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A(\theta)^p$.
- 3.2 On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p .
- 3.3 On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p .
- 3.4 Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = B$. On pose $A = 2I_n - B$, calculer pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p .
- 3.5 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p .

4. Calculer l'inverse d'une matrice.

4.1 Justifier si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible ou non puis, si P est inversible, calculer son inverse.

4.2 Justifier si $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible ou non puis, si P est inversible, calculer son inverse.

4.3 Justifier si $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible ou non puis, si P est inversible, calculer son inverse.

4.4 Justifier si $P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible ou non puis, si P est inversible, calculer son inverse.

4.5 Justifier si $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible ou non puis, si P est inversible, calculer son inverse.

5. Calculer un équivalent.

5.1 Déterminer en justifiant un équivalent en $+\infty$ de $u_n = \frac{\ln(n^2+1)}{n+1}$. *Indication (i).*

5.2 Déterminer en justifiant un équivalent en $+\infty$ de $u_n = \sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)}$. *Indication (ii).*

5.3 Déterminer en justifiant un équivalent en $+\infty$ de $u_n = e^{n^2+3n+\frac{5}{\sqrt{n}}+\frac{6}{n^2}}$. *Indication (iii).*

5.4 Déterminer en justifiant un équivalent en $+\infty$ de $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. *Indication (iv).*

5.5 Déterminer en justifiant un équivalent en 0 de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+3x}} - \frac{1}{\sqrt{2-3x}}$. *Indication (v).*

Indications.

- (i) Factoriser dans le logarithme par le terme prépondérant.
- Attention ! On rappelle que l'on ne compose pas les équivalents : $n \sim v \neq \ln(n) \sim \ln(v)$.
- (ii) Rassembler les logarithmes. Déterminer un équivalent du logarithme. Elever les équivalents à la puissance $1/2$.
- (iii) Séparer ce qui ne tend pas vers 0 de ce qui tend vers 0 grâce à la formule $e^{a+b} = e^a e^b$. Puis utiliser l'équivalent de e^x .
- (iv) Ecrire que $u_n = e^{\ln(u_n)}$ puis trouver la limite de $\ln(u_n)$ par un équivalent.
- (v) Factoriser par le terme prépondérant dans chaque racine puis faire un petit DL.