

Interrogation 14 d'entraînement Analyse Asymptotique

1. Restituer le cours.

- 1.1 Enumérer les opérations qu'il est possible de faire sur les équivalents et celles que l'on sait fausses en général.
- 1.2 Énoncer le théorème d'encadrement des équivalents.
- 1.3 Donner une condition nécessaire à l'existence d'un développement limité à l'ordre n . Préciser le cas $n = 0$ et $n = 1$.
- 1.4 Énoncer l'unicité du développement limité.
- 1.5 Énoncer la propriété permettant de primitiver un développement limité.
- 1.6 Énoncer la formule de Taylor-Young.
- 1.7 Réciter la biographie de Hardy.

Révisions

- 1.8 Définir une fonction \mathcal{C}^1 .
- 1.9 Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
- 1.10 Énoncer l'inégalité triangulaire pour l'intégrale.
- 1.11 Énoncer la croissance de l'intégrale.
- 1.12 Énoncer la séparation de l'intégrale.

2. Calculer un développement limité.

- 2.1 Calculer un développement à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \frac{e^x - 1}{\sqrt{1+x}}$.
- 2.2 Calculer un développement à l'ordre 6 en 0 de $f : x \mapsto (\operatorname{ch}(x) - \cos(x)) (\operatorname{sh}(x) - \sin(x))$.
- 2.3 Calculer un développement à l'ordre 4 en $+\infty$ de $f : x \mapsto \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2+x}$.
- 2.4 Calculer un développement à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{4}$ de $f : x \mapsto e^x \cos(x)$.
- 2.5 Calculer un développement à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto \frac{\cos(x) - 1}{(1+x)^2}$.

3. Manipuler un développement usuel.

- 3.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un développement limité à l'ordre n en 5 de $f : x \mapsto e^{2x}$.
- 3.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un développement limité à l'ordre $2n + 1$ en 0 de $f : x \mapsto \frac{\sin(x) \cos(x)}{x}$.
Indication (i).
- 3.3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un développement limité à l'ordre $2n + 1$ en $+\infty$ de $f : x \mapsto \arctan(x)$.
Indication (ii).
- 3.4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un développement limité à l'ordre $3n$ en 0 de $f : x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x^{3/2})}{\sqrt{x}}$.
- 3.5 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Déterminer un développement limité à l'ordre n en 0 de $f : x \mapsto \ln(1 + 3x) - 3x$.

4. Primitivation, dérivation, Taylor.

- 4.1 Par primitivation, déterminer le développement limité de la fonction arcsin en 0 à l'ordre 5.
- 4.2 Par dérivation, retrouver le développement limité de $f : x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ en 0 à l'ordre n .
- 4.3 A l'aide de la formule de Taylor, déterminer le développement limité de ch en 1 à l'ordre $2n$.
- 4.4 Par primitivation, déterminer le développement limité de $f : t \mapsto (1+t) \ln(1+t) - t$ en 0 à l'ordre 6.
- 4.5 Donner le développement limité en 0 à l'ordre 9 de $f : x \mapsto x^2 \arctan(x)$. En déduire celui de $g : x \mapsto 2x \arctan(x) + \frac{x^2}{1+x^2}$ en 0 à l'ordre 8.

5. Application de développement limité.

5.1 Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sh}(x) + \sin(x) - 2x}{x(\text{ch}(x) + \cos(x) - 2)}$.

 5.2 Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la valeur de a pour laquelle la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n\sqrt{n}(\sqrt[4]{n^2 + 1} - \sqrt{n + a})$ converge et préciser alors sa limite.

 5.3 Préciser le comportement asymptotique en 0 de $f : x \mapsto (1 - x + x^2)^{1/x}$.

 5.4 Préciser le comportement de $f : x \mapsto \frac{x^{1+\frac{1}{x}} - 1}{x-1}$ au voisinage de 1.

 5.5 Soit f la fonction $x \mapsto \frac{x^5 - \text{sh}(x^3)}{x^4 + \cos(x^7)}$. Déterminer $f^{(15)}(0)$.

On pourra admettre que la fonction f est \mathcal{C}^{15} au voisinage de 0.

(ii) Utiliser la formule $\arctan(x) + \arctan(\dots) = \dots$ pour se ramener à une variable $t = \frac{x}{1} \rightarrow 0$.

Attention à l'ordre exigé qui n'est pas $2n \dots$

(i) Utiliser la formule $\sin(x) \cos(x) = \dots$ pour n'avoir qu'une seule fonction trigonométrique.

Indications.