Correction de l'interrogation 14 d'entrainement
Analyse Asymptotique

1. **Restituer le cours.**

1.1 Sur les équivalents, il est possible de

- multiplier,
- d'élever à la puissance (éventuellement négative et donc de passer à l'inverse),
- de passer à la valeur absolue,
- de faire un changement de variable.

Il est cependant interdit

- de sommer des équivalents,
- de composer des équivalents par une fonction,
- d'écrire équivalent à 0.

1.2 Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et $(f, g, h) \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})^3$ tels que

$$\forall x \in I, \qquad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x).$$

Alors, par le théorème d'encadrement des équivalents,

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x).$$

1.3 Soient I un voisinage de 0 et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$.

i. f est continue en 0 si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 0 en 0. Dans ce cas $f(x) \underset{x \to 0}{=} f(0) + o(1)$.

ii. f est dérivable en 0 si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0. Dans ce case, $f(x) \underset{x \to 0}{=} f(0) + f'(0)x + o(x)$.

iii. **SI** f est $\mathscr{C}^n$ **ALORS** f admet un développement limité à l'ordre n.

1.4 Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n).$$

Alors, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $a_k = b_k$.

1.5 Soient I un voisinage de 0 et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 donné par

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n), \qquad (a_k)_{k \in [\![0\,;n]\!]} \in \mathbb{K}^{n+1}.$$

Soit F une primitive de f sur I alors F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 donné par

$$F(x) \underset{x \to 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o\left(x^{n+1}\right).$$

1.6 Soit $a \in \mathbb{R}$, I un voisinage de a et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$. Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ en a alors f admet un développement limité à l'ordre n en a donné par

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o\left((x-a)^n\right).$$

1.7 Bande de naïfs !

2. **Calculer un développement limité.**

2.1 On sait que

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + (-1/2)(-3/2)\frac{x^2}{2} + (-1/2)(-3/2)(-5/2)\frac{x^3}{6} + o\left(x^2\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{15x^3}{48} + o\left(x^3\right).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}f(x) = \frac{e^x - 1}{\sqrt{1+x}} &\underset{x\to 0}{=} \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{15x^3}{48} + o\left(x^3\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{llll} x & -\frac{x^2}{2} & +\frac{3x^3}{8} & +o\left(x^3\right) \\ & +\frac{x^2}{2} & -\frac{x^3}{4} & +o\left(x^3\right) \\ & & +\frac{x^3}{6} & +o\left(x^3\right) \\ & & & +o\left(x^3\right) \end{array} \\ &\underset{x\to 0}{=} x + \left(\frac{9}{24} - \frac{6}{24} + \frac{4}{24}\right)x^3 + o\left(x^3\right).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{7x^3}{24} + o\left(x^3\right).}$$

NB : en anticipant l'ordre, nous aurions pu faire un développement limité à l'ordre 2 de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ car tous ces termes seront ensuite multipliés par au moins x.

2.2 On a les égalités asymptotiques suivantes :

$$\begin{aligned}f(x) &= (\operatorname{ch}(x) - \cos(x))(\operatorname{sh}(x) - \sin(x)) \\ &\underset{x\to 0}{=} \left[1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + o\left(x^6\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o\left(x^6\right)\right)\right] \\ &\qquad\qquad \times \left[x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^6\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^6\right)\right)\right] \\ &\underset{x\to 0}{=} \left(x^2 + \frac{x^6}{360} + o\left(x^6\right)\right)\left(\frac{x^3}{3} + o\left(x^6\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{ll} \frac{x^5}{3} & +o\left(x^6\right) \\ & +o\left(x^6\right) \end{array} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^5}{3} + o\left(x^6\right).\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^5}{3} + o\left(x^6\right).}$$

2.3 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons $u = \frac{1}{x}$ i.e. $x = \frac{1}{u}$ et $g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right) = f(x)$. Alors

$$\forall u > 0, \quad g(u) = f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2+x} = \frac{e^{-u}}{2 + \frac{1}{u}} = \frac{u\, e^{-u}}{1+2u}.$$

De plus $u \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or on sait que $e^v \underset{v\to 0}{=} 1 + v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{6} + \frac{v^4}{24} + o\left(v^4\right)$. Donc en prenant $v = -u \to 0$, on a

$$e^{-u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o\left(u^4\right).$$

D'autre part, on a $\frac{1}{1+v} \underset{v\to 0}{=} 1-v+v^2-v^3+v^4+o\left(v^4\right)$. Donc en prenant $v=2u\to 0$, on a aussi

$$\frac{1}{1+2u} \underset{u\to 0}{=} 1-2u+4u^2-8u^3+16u^4+o\left(u^4\right).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
g(u) &\underset{u\to 0}{=} u\left(1-u+\frac{u^2}{2}-\frac{u^3}{6}+\frac{u^4}{24}+o\left(u^4\right)\right)\left(1-2u+4u^2-8u^3+16u^4+o\left(u^4\right)\right)\\
&\underset{u\to 0}{=} \left(u-u^2+\frac{u^3}{2}-\frac{u^4}{6}+o\left(u^4\right)\right)\left(1-2u+4u^2-8u^3+16u^4+o\left(u^4\right)\right)\\
&\underset{u\to 0}{=} \begin{array}{lllll} u & -2u^2 & +4u^3 & -8u^4 & +o\left(u^4\right)\\ & -u^2 & +2u^3 & -4u^4 & +o\left(u^4\right)\\ & & +\frac{u^3}{2} & -u^4 & +o\left(u^4\right)\\ & & & -\frac{u^4}{6} & +o\left(u^4\right)\\ & & & & +o\left(u^4\right)\end{array}\\
&\underset{u\to 0}{=} u-3u^2+\frac{13u^3}{2}-\frac{13\times 6+1}{6}u^4+o\left(u^4\right)\\
&\underset{u\to 0}{=} u-3u^2+\frac{13u^3}{2}-\frac{79}{6}u^4+o\left(u^4\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{13}{2x^3}-\frac{79}{6x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right).}$$

NB : ce n'est pas un vrai développement limité car les puissances de x sont négatives ici, on parle plutôt de développement asymptotique dans ce cas.

NB2 : En anticipant l'ordre nous aurions pu partir d'un développement limité à l'ordre 3 seulement de e^{-u} et de $\frac{1}{1+2u}$ car tous ces termes seront ensuite multipliés par u.

2.4 Posons $x=\frac{\pi}{4}+h$ i.e. $h=x-\frac{\pi}{4}$ et $g(h)=f(x)=f\left(\frac{pi}{4}+h\right)$. Alors pour tout $h\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
g(h)=f\left(\frac{\pi}{4}+h\right)=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}+h}\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right) &= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{e}^{h}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(h)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(h)\right]\\
&= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{h}\left(\cos(h)-\sin(h)\right).
\end{aligned}$$

Or on sait que

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{h} &\underset{h\to 0}{=} 1+h+\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right)\\
\cos(h) &\underset{h\to 0}{=} 1-\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right)\\
\sin(h) &\underset{h\to 0}{=} h+o\left(h^2\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
g(h) &\underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+h+\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right)\right)\left(1-\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right)-h+o\left(h^2\right)\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+h+\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right)\right)\left(1-h-\frac{h^2}{2}+o\left(h^2\right)\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\Big[\begin{array}{llll} 1 & -h & -\frac{h^2}{2} & +o\left(h^2\right)\\ & +h & -h^2 & +o\left(h^2\right)\\ & & +\frac{h^2}{2} & +o\left(h^2\right)\\ & & & +o\left(h^2\right)\Big]\end{array}\\
&\underset{h\to 0}{=} \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-h^2+o\left(h^2\right)\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{=} \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2\right).}$$

2.5 On sait que

$$\begin{aligned}
\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)\\
\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} &\underset{x\to 0}{=} 1-2x+(-2)(-3)\frac{x^2}{2}+(-2)(-3)(-4)\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1-2x+3x^2-4x^3+o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)-1\right)\left(1-2x+3x^2-4x^3+o\left(x^3\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \left(-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)\right)\left(1-2x+3x^2-4x^3+o\left(x^3\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} -\tfrac{x^2}{2}+x^3 \quad +o\left(x^3\right)\\
&\qquad\qquad\quad +o\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2}+x^3+o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2}+x^3+o\left(x^3\right).}$$

NB : on aurait pu à nouveau anticiper l'ordre et ne prendre le développement limité de $\frac{1}{(1+x)^2}$ *à l'ordre* 1 *uniquement.*

3. **Manipuler un développement usuel.**

3.1 Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $h=x-5$ i.e. $x=5+h$ et $g(h)=f(x)=f(5+h)$. Alors

$$\forall h\in\mathbb{R},\quad g(h)=f(5+h)=\mathrm{e}^{2(5+h)}=\mathrm{e}^{10}\,\mathrm{e}^{2h}.$$

Or on sait que

$$\mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{u^k}{k!}+o\left(u^n\right).$$

Donc en prenant $u=2h\to 0$, on a

$$\mathrm{e}^{2h} \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{2^k h^k}{k!}+o\left(h^n\right).$$

Ainsi,

$$g(h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{10}\frac{2^k h^k}{k!}+o\left(h^n\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 5}{=} \sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{10}\frac{2^k (x-5)^k}{k!}+o\left((x-5)^n\right).}$$

3.2 Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$f(x)=\frac{\sin(2x)}{2x}.$$

Or

$$\sin(u) \underset{u\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k u^{2k+1}}{(2k+1)!}+o\left(u^{2n+2}\right).$$

Ainsi, en posant $u = 2x \to 0$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right)}{2x} \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2^{2k} x^{2k}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 4^k x^{2k}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right).}$$

3.3 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

Posons $t = \frac{1}{x}$ i.e. $x = \frac{1}{t}$ et $g(t) = f(x) = f\left(\frac{1}{t}\right)$. Alors

$$\forall t > 0, \quad g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t).$$

Or, on sait que

$$\arctan(t) \underset{t\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{2k+1} + o\left(t^{2n+1}\right).$$

Ainsi,

$$g(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{2k+1} + o\left(t^{2n+1}\right) \underset{t\to 0}{=} \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} t^{2k+1}}{2k+1} + o\left(t^{2n+1}\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to +\infty}{=} \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)\,x^{2k+1}} + o\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right).}$$

3.4 Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que

$$\mathrm{sh}(u) \underset{u\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(u^{2n+1}\right).$$

Donc en prenant $u = x^{3/2} \to 0$, on obtient que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{3k+\frac{3}{2}}}{(2k+1)!} + o\left(x^{3n+\frac{3}{2}}\right)}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{3k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{3n+1}\right).$$

Conclusion, en tronquant à l'ordre $3n$,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{3k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{3n}\right).}$$

Déterminer un développement limité à l'ordre $3n$ en 0 de $f : x \mapsto \frac{\mathrm{sh}\left(x^{3/2}\right)}{\sqrt{x}}$.

3.5 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On a

$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} u^k}{k} + o\left(u^n\right).$$

Donc en posant $u = 3x \to 0$, on obtient

$$\begin{aligned} f(x) = \ln(1+3x) - 3x &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} 3^k x^k}{k} + o\left(x^n\right) - 3x \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k+1} 3^k x^k}{k} + o\left(x^n\right). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^{k+1} 3^k x^k}{k} + o\left(x^n\right).}$$

4. **Primitivation, dérivation, Taylor.**

4.1 Soit $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

- La fonction f admet le développement limité d'ordre 4 en 0 suivant :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + (-1/2)\left(-x^2\right) + (-1/2)(-3/2)\frac{\left(-x^2\right)^2}{2} + o\left(x^4\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o\left(x^4\right)$$

- La fonction arcsin est une primitive de f sur I.

Alors par le théorème de primitivation des développements limités, on en déduit que arcsin admet un développement limité d'ordre 5 donné par

$$\arcsin(x) \underset{x\to 0}{=} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{important !}}}{\arcsin(0)} + x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o\left(x^5\right).$$

Conclusion,

$$\boxed{\arcsin(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o\left(x^5\right).}$$

4.2 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$. Puisque la fonction f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $I =]-\infty\,;\,-1[$, par le théorème de Taylor-Young, on sait que f admet un développement limité d'ordre n :

$$\exists\,(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \qquad f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right).$$

Posons $g : x \mapsto \frac{1}{1-x}$. On observe que la fonction g est dérivable sur I et

$$\forall a \in I, \qquad g'(x) = -\frac{-1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} = f(x).$$

Donc g est une primitive de f. Donc par le théorème de primitivation des développements limités, on trouve que

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} g(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} + o\left(x^{n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} g(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1} x^k}{k} + o\left(x^{n+1}\right)$$

D'autre part, on sait que

$$g(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n+1} + o\left(x^{n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n+1} x^k + o\left(x^{n+1}\right).$$

Donc par unicité des développements limités :

$$\begin{cases} g(0) = 1 \text{ OK.} \\ \forall k \in [\![1; n+1]\!],\ \frac{a_{k-1}}{k} = 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall k \in [\![0; n]\!],\ a_k = k+1.$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (k+1)\, x^k + o\left(x^n\right).}$$

4.3 Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction ch est $\mathscr{C}^{2n}$ sur $I = \mathbb{R}$, voisinage de 1. Donc d'après le théorème de Taylor-Young, on a

$$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 1}{=} \sum_{k=0}^{2n} \frac{\mathrm{ch}^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k + o\left((x-1)^{2n}\right).$$

Or on sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, k pair, on a $\mathrm{ch}^{(k)} = \mathrm{ch}$ tandis que pour tout $k \in \mathbb{N}$, k impair, on a $\mathrm{ch}^{(k)} = \mathrm{sh}$. Séparons donc dans la somme les termes pairs et les termes impairs :

$$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 1}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{ch}^{(2k)}(1)}{(2k)!}(x-1)^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{ch}^{(2k+1)}(1)}{(2k+1)!}(x-1)^{2k+1} + o\left((x-1)^{2n}\right).$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 1}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{ch}(1)}{(2k)!}(x-1)^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{sh}(1)}{(2k+1)!}(x-1)^{2k+1} + o\left((x-1)^{2n}\right).}$$

4.4 Soit $f : t \mapsto (1+t)\ln(1+t) - t$. La fonction f est définie et même dérivable sur $I = \left]-1\,;+\infty\right[$, voisinage de 0 et

$$\forall x \in I, \qquad f'(x) = \ln(1+t) + \frac{1+t}{1+t} - 1 = \ln(1+t).$$

Posons $g : t \mapsto \ln(1+t)$. Alors

- La fonction g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 donné par

$$g(t) \underset{t\to 0}{=} t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + o\left(t^5\right).$$

- La fonction f est une primitive de g sur I.

Donc d'après le théorème de primitivation des développements limités, la fonction f admet un développement limité en 0 d'ordre 6 donné par

$$\boxed{f(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{12} - \frac{t^5}{20} + \frac{t^6}{30} + o\left(t^6\right).}$$

4.5 Soient $f : x \mapsto x^2 \arctan(x)$. On a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x^2\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o\left(x^7\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^3 - \frac{x^5}{3} + \frac{x^7}{5} - \frac{x^9}{7} + o\left(x^9\right).$$

Soit $g : x \mapsto 2x\arctan(x) + \frac{x^2}{1+x^2}$. La fonction g est définie et même $\mathscr{C}^8$ sur $\mathbb{R}$ et notamment en 0 donc par le théorème de Taylor-Young, admet un développement limité à l'ordre 8 en 0 :

$$\exists\,(a_0,\dots,a_8) \in \mathbb{R}^9,\ g(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{8} a_k x^k + o\left(x^n\right).$$

D'autre part, on observe que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 2x\arctan(x) + \frac{x^2}{1+x^2} = g(x).$$

Donc f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$. Donc par le théorème de primitivation des développements limités,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + a_0 x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + a_3\frac{x^4}{4} + a_4\frac{x^5}{5} + a_5\frac{x^6}{6} + a_6\frac{x^7}{7} + a_7\frac{x^8}{8} + a_8\frac{x^9}{9} + o\left(x^9\right).$$

Par unicité du développement limité, on obtient que

$$f(0) = 0,\ a_0 = a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = 0,\ \frac{a_2}{3} = 1,\ \frac{a_4}{5} = -\frac{1}{3},\ \frac{a_6}{7} = \frac{1}{5},\ \frac{a_8}{9} = -\frac{1}{7}.$$

Conclusion,

$$\boxed{g(x) \underset{x\to 0}{=} 3x^2 - \frac{5}{3}x^4 + \frac{7}{5}x^6 - \frac{9}{7}x^8 + o\left(x^8\right).}$$

5. **Application de développement limité.**

5.1 On a au voisinage de 0 :

$$\operatorname{sh}(x)+\sin(x)-2x \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)+x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)-2x \underset{x\to 0}{=} \frac{x^5}{60}+o\left(x^5\right).$$

Par conséquent,

$$\operatorname{sh}(x)+\sin(x)-2x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^5}{60}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} x\left(\operatorname{ch}(x)+\cos(x)-2\right) &\underset{x\to 0}{=} x\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)+1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x\left(\frac{x^4}{12}+o\left(x^4\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^5}{12}+o\left(x^5\right). \end{aligned}$$

Et donc

$$x\left(\operatorname{ch}(x)+\cos(x)-2\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^5}{12}.$$

Donc par quotient d'équivalents,

$$\frac{\operatorname{sh}(x)+\sin(x)-2x}{x\left(\operatorname{ch}(x)+\cos(x)-2\right)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^5}{60}}{\frac{x^5}{12}}=\frac{12}{60}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}.$$

Or deux équivalents ont même limite. Conclusion,

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}(x)+\sin(x)-2x}{x\left(\operatorname{ch}(x)+\cos(x)-2\right)}=\frac{1}{5}.}$$

5.2 Soient $a\in\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n=n\sqrt{n}\left(\sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt{n+a}\right)$. On a au voisinage de $+\infty$,

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n\to+\infty}{=} n\sqrt{n}\left(\sqrt{n}\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{a}{n}}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} n^2\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{1+\frac{a}{n}}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} n^2\left(1+\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\left(1+\frac{a}{2n}+\frac{(1/2)\left(-1/2\right)}{2}\frac{a^2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} n^2\left(-\frac{a}{2n}+\frac{2+a^2}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{a}{2}n+\frac{2+a^2}{8}+o\left(1\right). \end{aligned}$$

Donc si $a\neq 0$,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{a}{2}n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty.$$

ATTENTION!!! Il est vital de dire $a\neq 0$ avant de préciser l'équivalent car nul n'est équivalent à la suite nulle !

Dans ce cas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Ainsi, pour obtenir la convergence de la suite, il faut que $a=0$ et dans ce cas

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{2}{8}+o\left(1\right) \qquad\Rightarrow\qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}.$$

Conclusion,

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \quad\Leftrightarrow\quad a=0, \qquad \text{dans ce cas,} \qquad \lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{4}.}$$

5.3 On a au voisinage de 0 :
$$f(x) = \left(1-x+x^2\right)^{1/x} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\left(1-x+x^2\right)}.$$
Or $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right)$. Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} -x+x^2$. Alors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- Puis
$$u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} x^2 - 2x^3 + o\left(x^3\right).$$
- Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$, on a $u(x)^3 \underset{x\to 0}{\sim} -x^3$ i.e. $u(x)^3 \underset{x\to 0}{=} -x^3 + o\left(x^3\right)$.
- Et donc $o\left(u(x)^3\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)$.

Ainsi,
$$\begin{array}{rcllll}
\ln\left(1-x+x^2\right) & \underset{x\to 0}{=} & -x & +x^2 & & \\
& & & -\frac{1}{2}(x^2 & -2x^3 & +o\left(x^3\right)) \\
& & & & +\frac{1}{3}(-x^3 & +o\left(x^3\right)) \\
& & & & & +o\left(x^3\right) \\
& \underset{x\to 0}{=} & -x & +\frac{x^2}{2} & +\frac{2x^3}{3} & +o\left(x^3\right).
\end{array}$$
Donc
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\left(-x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{-1+\frac{x}{2}+\frac{2x^2}{3}+o\left(x^2\right)} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}+\frac{2x^2}{3}+o\left(x^2\right)}.$$
Or $\mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)$. Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} + \frac{2x^2}{3} + o\left(x^2\right)$. Alors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- De plus, $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$ donc $u(x)^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{4}$ i.e. $u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{4} + o\left(x^2\right)$.
- Enfin, $o\left(u(x)^2\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\right)$.

Ainsi,
$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{-1}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{2x^2}{3}+o\left(x^2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}+o\left(x^2\right)\right)+o\left(x^2\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{-1} + \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}x + \frac{20\,\mathrm{e}^{-1}}{24}x^2 + o\left(x^2\right).
\end{aligned}$$
Donc,
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}^{-1} + \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}x + \frac{5\,\mathrm{e}^{-1}}{6}x^2 + o\left(x^2\right).$$
Ainsi,

$$\boxed{\text{la courbe représentative de } f \text{ admet pour tangente en 0 la droite d'équation } y = \mathrm{e}^{-1} + \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}x.}$$

De plus,
$$f(x) - \left(\mathrm{e}^{-1} + \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2}x\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{5\,\mathrm{e}^{-1}}{6}x^2 + o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{5\,\mathrm{e}^{-1}}{6}x^2 \geqslant 0.$$
Or deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré. Conclusion,

$$\boxed{\text{la courbe représentative de } f \text{ est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.}}$$

5.4 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, posons $h = x - 1$ i.e. $x = 1 + h$. Alors,

$$\begin{aligned}
f(x) = f(1+h) &\underset{h\to 0}{=} \frac{(1+h)^{1+\frac{1}{1+h}} - 1}{1+h-1} \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{\mathrm{e}^{\left(1+\frac{1}{1+h}\right)\ln(1+h)} - 1}{h} \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{\mathrm{e}^{\left(1+1-h+h^2-h^3+o\left(h^3\right)\right)\left(h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o\left(h^3\right)\right)} - 1}{h} \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{\mathrm{e}^{2h-h^2+\frac{2h^3}{3}+o\left(h^3\right)-h^2+\frac{h^3}{2}+o\left(h^3\right)+h^3+o\left(h^3\right)+o\left(h^3\right)} - 1}{h} \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{\mathrm{e}^{2h-2h^2+\frac{13h^3}{6}+o\left(h^3\right)} - 1}{h}
\end{aligned}$$

Or on a $\mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o\left(u^3\right)$. Posons $u(h) \underset{h\to 0}{=} 2h - 2h^2 + \frac{13h^3}{6} + o\left(h^3\right)$. Alors,

- $u(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$
- De plus,

$$\begin{array}{rllll}
u(h)^2 & \underset{h\to 0}{=} & \multicolumn{3}{l}{\left(2h - 2h^2 + \frac{13h^3}{6} + o\left(h^3\right)\right)\left(2h - 2h^2 + \frac{13h^3}{6} + o\left(h^3\right)\right)} \\
 & \underset{h\to 0}{=} & 4h^2 & -4h^3 & +o\left(h^3\right) \\
 & & & -4h^3 & +o\left(h^3\right) \\
 & & & & +o\left(h^3\right) \\
 & \underset{h\to 0}{=} & 4h^2 & -8h^3 & +o\left(h^3\right).
\end{array}$$

- Comme $u(h) \underset{h\to 0}{\sim} 2h$, on a $u(h)^3 \underset{h\to 0}{\sim} 8h^3$ i.e. $u(h)^3 \underset{h\to 0}{=} 8h^3 + o\left(h^3\right)$.
- Enfin, $o\left(u(h)^3\right) \underset{h\to 0}{=} o\left(h^3\right)$.

Ainsi,

$$\begin{array}{rllllll}
\mathrm{e}^{2h-2h^2+\frac{13h^3}{6}+o\left(h^3\right)} & \underset{h\to 0}{=} & 1 & +2h & -2h^2 & +\frac{13h^3}{6} & +o\left(h^3\right) \\
 & & & & +\frac{1}{2}(4h^2 & -8h^3 & +o\left(h^3\right)) \\
 & & & & & +\frac{1}{6}(8h^3 & +o\left(h^3\right)) \\
 & & & & & & +o\left(h^3\right) \\
 & \underset{h\to 0}{=} & 1 & +2h & & -\frac{3h^3}{6} & +o\left(h^3\right).
\end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(1+h) &\underset{h\to 0}{=} \frac{1 + 2h - \frac{3h^3}{6} + o\left(h^3\right) - 1}{h} \\
&\underset{h\to 0}{=} \frac{2h - \frac{3h^3}{6} + o\left(h^3\right)}{h} \\
&\underset{h\to 0}{=} 2 - \frac{3h^2}{6} + o\left(h^2\right).
\end{aligned}$$

D'où,

$$f(x) \underset{x\to 1}{=} 2 - \frac{3(x-1)^2}{6} + o\left((x-1)^2\right).$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{la courbe représentative de } f \text{ admet pour tangente en 1 la droite d'équation } y = 2.}$$

De plus, $f(x) - 2 \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{3(x-1)^2}{6} \leqslant 0$. Or deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré donc

$$\boxed{\text{la courbe représentative de } f \text{ est en-dessous de sa tangente au voisinage de 1.}}$$

5.5 On a

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^5-\left(x^3+\frac{x^9}{3}+\frac{x^{15}}{5}+o\left(x^{15}\right)\right)}{x^4+1-\frac{x^{14}}{2}+\frac{x^{28}}{24}+o\left(x^{28}\right)} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{-x^3+x^5-\frac{x^9}{3}-\frac{x^{15}}{5}+o\left(x^{15}\right)}{1+x^4-\frac{x^{14}}{2}+o\left(x^{15}\right)}. \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2-u^3+u^4+o\left(u^4\right)$. Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} x^4-\frac{x^{14}}{2}+o\left(x^{15}\right)$. Alors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- De plus,
$$u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(x^4-\frac{x^{14}}{2}+o\left(x^{15}\right)\right)\left(x^4-\frac{x^{14}}{2}+o\left(x^{15}\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^8+o\left(x^{15}\right)$$
- Puis,
$$u(x)^3 = u(x)u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \left(x^4-\frac{x^{14}}{2}+o\left(x^{15}\right)\right)\left(x^8+o\left(x^{15}\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^{12}+o\left(x^{15}\right).$$
- Mais aussi, puisque $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^4$, alors $u(x)^4 \underset{x\to 0}{\sim} x^{16}$. Par conséquent, $u(x)^4 \underset{x\to 0}{=} o\left(x^{15}\right)$.
- A fortiori, $o\left(u(x)^4\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^{15}\right)$.

Attention : il était important d'aller jusqu'à l'ordre 4 même si $u(x)^4 \underset{x\to 0}{=} o\left(x^{15}\right)$, en effet en restant à l'ordre 3, nous aurions eu $o\left(u(x)^3\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^{12}\right)$ ce qui aurait été insuffisant.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+u(x)} &\underset{x\to 0}{=} 1-u+u^2-u^3+u^4+o\left(u^4\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1-x^4 \qquad\qquad +\frac{x^{14}}{2} \quad +o\left(x^{15}\right) \\ &\qquad\qquad +x^8 \qquad\qquad\qquad +o\left(x^{15}\right) \\ &\qquad\qquad\qquad -x^{12} \qquad\quad +o\left(x^{15}\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +o\left(x^{15}\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +o\left(x^{15}\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1-x^4+x^8-x^{12}+\frac{x^{14}}{2}+o\left(x^{15}\right) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(-x^3+x^5-\frac{x^9}{3}-\frac{x^{15}}{5}+o\left(x^{15}\right)\right)\left(1-x^4+x^8-x^{12}+\frac{x^{14}}{2}+o\left(x^{15}\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} -x^3+x^7-x^{11}+x^{15}+o\left(x^{15}\right)+x^5-x^9+x^{13}+o\left(x^{15}\right)-\frac{x^9}{3}+\frac{x^{13}}{9}+o\left(x^{15}\right)-\frac{x^{15}}{5}+o\left(x^{15}\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} -x^3+x^5+x^7-\frac{4x^9}{3}-x^{11}+\frac{10x^{13}}{9}+\frac{4x^{15}}{5}+o\left(x^{15}\right). \end{aligned}$$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^{15}$ au voisinage de 0 comme composée de fonctions qui le sont. Donc par la formule de Taylor-Young,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{15} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o\left(x^{15}\right).$$

Donc par unicité des coefficients d'un développement limité, on obtient que

$$\frac{f^{(15)}(0)}{(15)!} = \frac{4}{5}.$$

Conclusion,

$$\boxed{f^{(15)}(0) = \frac{4}{5}15! = 12\times 14!}$$