

Interrogation 16 d'entraînement

Continuité et dérivabilité

1. Restituer le cours.

- 1.1 Énoncer le théorème d'encadrement.
- 1.2 Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite.
- 1.3 Énoncer le théorème des bornes atteintes.
- 1.4 Énoncer l'identité des accroissements finis.
- 1.5 Epeler le mot lipschitzienne à l'endroit puis à l'envers le plus vite possible.

Révisions

- 1.6 Énoncer le principe de superposition à l'ordre 2.
 - 1.7 Énoncer la définition et propriété d'un problème de Cauchy à l'ordre 2.
 - 1.8 Donner la définition d'une partie majorée, minorée, bornée.
 - 1.9 Caractériser avec la valeur absolue le fait qu'une partie soit bornée.
 - 1.10 Donner la définition d'un maximum, d'un minimum d'une partie.
2. (a) **Définitions sur exemples.** Donner dans chaque cas la définition rigoureuse.

- 2.1 $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0.
- 2.2 sh est dérivable en 3 et sa dérivée vaut ch(3).
- 2.3 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.
- 2.4 $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à droite en 5.
- 2.5 Soit $n \in \mathbb{N}$. $x^n \ll_{x \rightarrow +\infty} e^x$.
- 2.6 $x \mapsto \cos(x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.
- 2.7 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$.
- 2.8 f est bornée au voisinage de $+\infty$.
- 2.9 f est positive au voisinage de 0.
- 2.10 $x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche en 0 et cette dérivée vaut -1 .

(b) **Théorèmes sur exemples.**

- 2.11 Montrer que $x \mapsto x \sin(x)$ n'admet aucune limite en $+\infty$.
- 2.12 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x \in [0; 1]$ tel que $\ln(1 + x^n) = -x + 1$.
- 2.13 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(x + 3)^n - x^n = 3n\alpha^{n-1}$.
- 2.14 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$.
- 2.15 Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x^3 e^{\sin(100x)}}{x+3}$ est bornée sur $[0; 1]$.
- 2.16 Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.
- 2.17 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, il existe un unique $x \in [1; +\infty[$ tel que $x^n = x + 1$.
- 2.18 Montrer que pour tout $y \in]-1; 0[$, il existe $x \in]-1; 1[$ tel que $\arcsin(y + 1) = \arcsin(y) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- 2.19 Montrer que la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}\left(\frac{\cos(x)}{\ln(x)}\right)$ admet un maximum sur $[2; 3]$.
- 2.20 Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$.

3. Montrer qu'une fonction est lipschitzienne.

- 3.1 Montrer que arccos est lipschitzienne sur $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.
3.2 Montrer que arctan est lipschitzienne sur \mathbb{R} .
3.3 Montrer que $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ est lipschitzienne sur $[1; +\infty[$.
3.4 Montrer que tan est lipschitzienne sur $[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}]$.
3.5 Montrer que $f : x \mapsto \ln(5x + 2)$ est lipschitzienne sur $[0; 1]$.

4. Prolongement de classe \mathcal{C}^1 .

- 4.1 Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} x\sqrt{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et préciser $f'(0)$.
4.2 Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^4}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et préciser $f'(0)$.
4.3 Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\text{sh}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et préciser $f'(0)$.
4.4 Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et préciser $f'(0)$.
4.5 Montrer que $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\text{ch}(x)-1}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et préciser $f'(0)$.

5. Compositions de développements limités.

- 5.1 Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(2x)+\sin(3x)}$ en 0.
5.2 Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de $f : x \mapsto \frac{x}{3+e^{-x}}$ en 0.
5.3 Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de $f : x \mapsto e^{\text{sh}(x)}$ en 1.
5.4 Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de $f : x \mapsto (1+2x)^{1/x}$ en 0.
5.5 Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de $f : x \mapsto \frac{1}{1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ en 0.