Interrogation 17 d'entrainement
Suites numériques

1. **Restituer le cours.**
   - 1.1 Donner la définition de deux suites adjacentes. Que peut-on en déduire ?
   - 1.2 Définir la convergence d'une suite complexe (définition IV.1).
   - 1.3 Donner une condition suffisante pour qu'une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ soit croissante et comment le démontre-t-on ?
   - 1.4 Donner la forme explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   - 1.5 Donner la définition d'une suite extraite. Quand est-ce qu'une suite extraite converge-t-elle ?
   - 1.6 Pour vous entraîner à prononcer extratrice, dites « suite indicée par une extractrice » trois fois, le plus vite possible.

   Révisions
   - 1.7 Donner la définition de la borne inférieure, supérieure d'une partie.
   - 1.8 Donner une condition suffisante à l'existence de la borne supérieure, inférieure.
   - 1.9 Donner la définition d'un intervalle.
   - 1.10 Définir la partie entière.
   - 1.11 Traduire le fait que $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   - 1.12 Donner la caractérisation de l'inversibilité par l'existence d'un inverse d'un seul côté (cf théorème II.4).
   - 1.13 Enoncer la formule de Bernoulli et du binôme de Newton pour deux matrices.
   - 1.14 Enoncer la proposition donnant l'inverse du produit.

2. **Savoir passer à la limite.**
   - 2.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2| \leqslant u_n$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Que dire de sa limite ?
   - 2.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{u_n}}$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Que dire de sa limite ?
   - 2.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sin(u_n)$. On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right]$. Que dire de la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   - 2.4 On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, qu'elle converge et que $u_0 = -1$. Que dire de sa limite ?
   - 2.5 On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(1 + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Que dire de la monotonie et de la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   - 2.6 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} + u_n + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Que dire de sa limite ?
   - 2.7 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = -\frac{e^{\frac{1}{n}}}{2+u_n}$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Que dire de sa limite ?
   - 2.8 Que dire de la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = \lfloor u_n \rfloor$?
   - 2.9 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 5u_n - 3v_n \end{cases}$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Déterminer alors leurs limites.
   - 2.10 On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{3n} \in]-5\,;\,5[$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Que dire de sa limite ?
   - 2.11 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = e^{u_n}$. On suppose que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   - 2.12 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{2n} \in [-3\,;\,-2] \\ u_{2n+1} > 0 \end{cases}$. Que dire de la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   - 2.13 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 2u_n| \leqslant 2$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Que dire de sa limite ?
   - 2.14 Exhiber un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et telle que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit divergente.
   - 2.15 Exhiber un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive, tendant vers 0 et qui ne soit pas décroissante.
   - 2.16 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = v_n^2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{u_n} \end{cases}$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Que dire de leurs limites ?

2.17 Exhiber un exemple de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergeant vers $+\infty$ mais qui ne soit pas croissante.

2.18 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{2n} - 2u_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Que dire de sa limite ?

2.19 Soit $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \geqslant 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^\alpha + \frac{1}{n^2}$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Que dire de sa limite ?

2.20 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 3| \leqslant u_n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Que dire de sa limite ?

3. **Donner une forme explicite.**

3.1 Donner une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -11$, $u_1 = -\frac{37}{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3u_{n+1} - 2u_n + 15 = 0$.

3.2 Donner une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2\sqrt{3}u_{n+1} - 4u_n$.

3.3 Donner une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 8$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 10u_{n+1} - 25u_n + 48n - 24$. *On pourra poser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 3n$.*

3.4 On pose $f : x \mapsto x + 3$, $u_0 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et enfin pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Donner une expression explicite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.5 Donner une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \mathrm{e}^2$, $u_1 = \mathrm{e}^5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^5}{u_n^6}$. *On pourra poser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$.*

4. **Monotonie.**

4.1 Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$.

4.2 Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n + \frac{1}{n}$.

4.3 Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \operatorname{sh}\left(n^2 - n + 3\right)$.

4.4 Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n}{3^n}$.

4.5 Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

5. **Déterminer la limite d'une suite.**

5.1 Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \arctan(k)$ diverge vers $+\infty$.

5.2 Soit f une fonction $\frac{1}{3}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que 4 est un point fixe de f. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 4.

5.3 Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$.

5.4 Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \frac{u_n - 8}{2}$.

5.5 Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n^2 + 2$ diverge vers $+\infty$.